-EXERCICE 26.2-

• ENONCE :

« Sphère chargée avec une cavité »

1) Soit une sphère de rayon R et de centre O_1, uniformément chargée en volume ($\rho \succ 0$).

Cette sphère présente une cavité de rayon a, de centre $O_2 \neq O_1$, vide de toute charge.

Calculer le champ électrostatique dans cette cavité.

2) On considère maintenant un corps à répartition homogène de matière (on notera μ la masse volumique), comportant une grotte vide de toute masse : avec les mêmes notations que précédemment, on demande de calculer le champ gravitationnel dans la grotte.

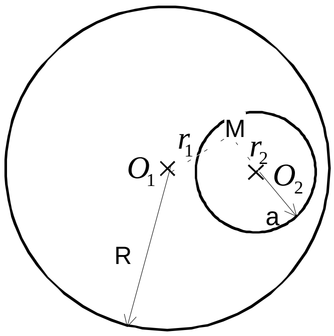
• CORRIGE :

« Sphère chargée avec une cavité »

1) Nous allons appliquer le **théorème de superposition**, en considérant la répartition réelle comme équivalente à la superposition de 2 sphères **pleines** :

- l'une de rayon R et de centre O_1, chargée positivement ($+\rho$) ; le champ sera noté $\vec{E}_1$.
- l'autre de rayon a, de centre O_2, chargée négativement ($-\rho$) ; le champ sera noté $\vec{E}_2$.

Rq : le calcul des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sera simple, car l'on retrouve une symétrie **sphérique** (pour chacune des sphères « fictives »), perdue dans le cas de la sphère réelle à cause de la cavité. On peut donc raisonner sur la figure suivante :



Pour chaque sphère, on peut tenir le raisonnement suivant:
- l'invariance par rotation fait que le champ ne dépend que de la **variable r**.
- tout plan contenant l'origine et le point M où l'on calcule le champ est plan de **symétrie** : le champ appartient à l'intersection de ces plans, il est donc **radial**.

En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r_1 \prec R$, il vient pour $\vec{E}_1$:

$$\oiint_{sphère} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 4\pi r_1^2 \times E_1 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r_1^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$ ($\vec{E}_1$ ayant un module constant sur cette sphère).

D'où : $\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}\vec{e}_{r_1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}}$

De même : $\boxed{\vec{E}_2 = \frac{-\rho r_2}{3\varepsilon_0}\vec{e}_{r_2} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{MO_2}}$; par superposition, on a donc :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MO_2}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Rq : le champ électrostatique a donc la propriété remarquable d'être **UNIFORME** dans la cavité.

2) On applique cette fois le « théorème de Gauss de la gravitation » (analogie entre le champ coulombien et le champ newtonien, tous les deux en $1/r^2$), soit :

$\boxed{\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}}$ (G étant la constante universelle de la gravitation et m_{int} la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée S). Après un calcul analogue, on obtient :

$\boxed{\vec{g} = \frac{4\pi G\mu}{3}\overrightarrow{O_1O_2}}$ (le champ gravitationnel est également **uniforme** dans la grotte).