

-EXERCICE 26.2-• **ENONCE** :

« Sphère chargée avec une cavité »

1) Soit une sphère de rayon R et de centre O_1 , uniformément chargée en volume ($\rho > 0$).

Cette sphère présente une cavité de rayon a , de centre $O_2 \neq O_1$, vide de toute charge.

Calculer le champ électrostatique dans cette cavité.

2) On considère maintenant un corps à répartition homogène de matière (on notera μ la masse volumique), comportant une grotte vide de toute masse : avec les mêmes notations que précédemment, on demande de calculer le champ gravitationnel dans la grotte.

EXERCICE

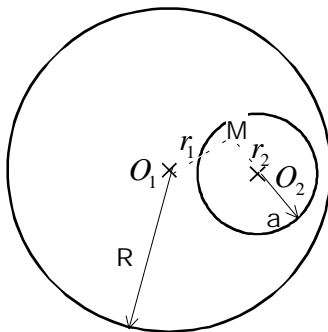
 • CORRIGE :

« Sphère chargée avec une cavité »

1) Nous allons appliquer le **théorème de superposition**, en considérant la répartition réelle comme équivalente à la superposition de 2 sphères **pleines** :

- ♦ l'une de rayon R et de centre O_1 , chargée positivement ($+\rho$) ; le champ sera noté \vec{E}_1 .
- ♦ l'autre de rayon a , de centre O_2 , chargée négativement ($-\rho$) ; le champ sera noté \vec{E}_2 .

Rq : le calcul des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sera simple, car l'on retrouve une symétrie **sphérique** (pour chacune des sphères « fictives »), perdue dans le cas de la sphère réelle à cause de la cavité. On peut donc raisonner sur la figure suivante :



Pour chaque sphère, on peut tenir le raisonnement suivant:

- l'invariance par rotation fait que le champ ne dépend que de la **variable r**.
- tout plan contenant l'origine et le point M où l'on calcule le champ est plan de **symétrie** : le champ appartient à l'intersection de ces plans, il est donc **radial**.

En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r_1 < R$, il vient pour \vec{E}_1 :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 4\pi r_1^2 \times E_1 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r_1^3 \rho}{3\epsilon_0} \quad (\vec{E}_1 \text{ ayant un module constant sur cette sphère}).$$

$$\text{D'où : } \vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M}$$

$$\text{De même : } \vec{E}_2 = \frac{-\rho r_2}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r_2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{M O_2} ; \text{ par superposition, on a donc :}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{O_1 M} + \overrightarrow{M O_2}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Rq : le champ électrostatique a donc la propriété remarquable d'être **UNIFORME** dans la cavité.

2) On applique cette fois le « théorème de Gauss de la gravitation » (analogie entre le champ coulombien et le champ newtonien, tous les deux en $1/r^2$), soit :

$$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}} \quad (G \text{ étant la constante universelle de la gravitation et } m_{\text{int}} \text{ la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée } S). \text{ Après un calcul analogue, on obtient :}$$

$$\vec{g} = \frac{4\pi G \mu}{3} \overrightarrow{O_1 O_2} \quad (\text{le champ gravitationnel est également } \mathbf{uniforme} \text{ dans la grotte}).$$