

Séries à termes positifs : Niveau 1

EXERCICE 1

[I]

[S]

Équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$$

EXERCICE 2

[I]

[S]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^* telle qu'il existe une constante non nulle ℓ vérifiant

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \sim \frac{\ell}{u_n}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n^2$ est divergente

2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$. En comparant les sommes partielles de la série de terme général $u_n^2 S_n^2$ à une intégrale, trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

[I]

[S]

Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 4

[I]

[S]

Étudier la convergence de la série $\sum_n \sin \pi (n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

[E]

☞ Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} k^k$ est négligeable devant n^n quand n tend vers $+\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

[E]

☞ Si la série $\sum u_n^2$ converge, u_n tend vers 0.

☞ Comparer $\sum_{k=0}^n u_n^2 S_n^2$ à $\int_{S_0}^{S_n} x^2 dx$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

[E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

[E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sin \pi(n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ et discuter selon la position de α par rapport à 1.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1

[E]

La suite de terme général k^k est croissante donc $S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n = n^n + (n-1)^{n-1} + r_n$ où $r_n \leq (n-2)(n-2)^{n-2} < (n-1)^{n-1}$. On a donc $0 < S_n - n^n < 2(n-1)^{n-1} = o(n^n)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2

[E]

1) Si la série à termes strictement positifs $\sum u_n^2$ était convergente elle aurait pour somme un réel non nul s tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{s}$ et alors la condition nécessaire de convergence vers 0 pour la suite de terme général u_n^2 ne saurait être réalisée.

La série à termes positifs $\sum u_n^2$ est donc divergente et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sum_{k=0}^n u_k^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) $\int_{S_{n-1}}^{S_n} x^2 dx \leq u_n^2 S_n^2 \leq \int_{S_n}^{S_{n+1}} x^2 dx$, donc $\int_{S_0}^{S_n} x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n u_k^2 S_k^2 \leq \int_{S_1}^{S_{n+1}} x^2 dx$. Or les deux

membres extrêmes de cette inégalité sont, d'après 1), des infiniment grands équivalents à $\frac{S_n^3}{3}$ quand n tend vers l'infini (en effet $S_{n+1} = S_n + u_n^2 = S_n + o(S_n) \sim S_n$). Par hypothèse la suite de terme général $u_k^2 S_k^2$ converge vers $\ell^2 \neq 0$, donc (théorème de sommation d'équivalents en cas de séries à termes positifs et divergentes) :

$$\frac{S_n^3}{3} \sim \sum_{k=1}^n u_k^2 S_k^2 \sim n\ell^2 \sim \frac{\ell^3}{3u_n^3}.$$

On en conclut que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{\frac{\ell}{3n}}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3

[E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right).$$

On a donc $u_n = v_n + w_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$. Le critère de Riemann montre que la série

$\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{2}{3}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4

[E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$(n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = n \left(1 + \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) = n + \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$$

- ▶ Si $\alpha > 1$, $u_n = \sin \pi(n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{(-1)^n \pi}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$. On peut donc écrire $u_n = v_n + w_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{\alpha n^{\alpha-1}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$. Comme $2\alpha - 1 > 1$, le critère de Riemann et le théorème de domination montrent que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Il en résulte que notre série $\sum u_n$ est convergente lorsque $\alpha > 1$.
- ▶ Si $0 < \alpha < 1$, $u_n = \sin \pi(n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = (-1)^n \sin \theta_n$ où $\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi n^{1-\alpha}}{\alpha}$. Dans ces conditions $|u_n|$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- ▶ si $\alpha = 1$, $u_n = \sin \pi(n + 1)$ est le terme général de la série nulle.

En résumé notre série converge si et seulement si $\alpha \geq 1$.