II Séries à termes réels positifs

Lorsqu'une série $\sum u_n = (u\,,\,U)$ est associée à une suite u à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, *la suite U de ses sommes partielles est croissante* en raison de la relation suite-série :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; U_{n+1} - U_n = u_{n+1} \geqslant 0\,.$$

Il en résulte le théorème simple mais fondamental :

Théorème

Pour que la série $\sum u_n$ à termes réels positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite $U = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles soit majorée.

II.1 Les règles de comparaison : $\mathcal{O}$, o $\sim$

Corollaire RÈGLE DE DOMINATION

Soient u et v deux suites réelles telles qu'il existe un rang N et un réel positif M vérifiant

$$\forall n \geqslant N\,,\; 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même pour la série $\sum v_n$.
Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum u_n$.

- ☞ On dit qu'une suite u à termes réels positifs est dominée par une suite à termes réels positifs v lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$. Cette relation entre suites réelles positives se note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: La relation de domination $\mathcal{O}$ n'est pas un ordre sur l'ensemble des suites réelles positives mais c'est une relations réflexive et transitive.
- ☞ Si deux suites réelles positives u et v vérifient $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ alors les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (du point de vue de la convergence) c'est à dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- ☞ On dit que la suite réelle u est négligeable devant la suite réelle v lorsqu'il existe une suite réelle ε convergente vers 0 telle que $u = \varepsilon v$. Cette relation entre suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se note $u_n = o(v_n)$.

  On dit que la suite réelle u est équivalente à la suite réelle v lorsque $u_n - v_n = o(v_n)$ ce que l'on écrit indifféremment $u_n = v_n + o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$. On vérifie que la relation ainsi définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est réflexive, symétrique et transitive, c'est pourquoi on l'appelle *relation d'équivalence*. Un développement limité de u_n lorsqu'il est possible donnera ainsi un équivalent simple de u_n , pour lequel la règle d'équivalence ci-dessous permet de conclure quant-à la nature de $\sum u_n$.

Corollaire RÈGLE D'ÉQUIVALENCE

Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (du point de vue de la convergence).

En effet lorsque $u_n \sim v_n$ on a aussi $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
Voici quelques exemples simples mais utiles (séries de Riemann) :

- ☞ La suite réelle de terme général $U_n = \ln n$ est divergente donc la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est divergente. Or
$$U_{n+1} - U_n = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{n} \tag{1.3}$$
Donc la série *harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

- ☞ Pour tout réel $\alpha \leqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ Donc par la règle de domination $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.

- ☞ Pour tout réel $\alpha > 1$ la suite de terme général $U_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge (vers 0) donc la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est convergente. Un développement limité quand n tend vers l'infini donne
$$U_{n+1} = U_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = U_n + \frac{1-\alpha}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
soit encore
$$U_{n+1} - U_n \sim \frac{1-\alpha}{n^\alpha} \tag{1.4}$$
La règle d'équivalence pour les série à termes positifs montre ainsi que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente lorsque $\alpha > 1$.

- ☞ Règle de Riemann : *Soit u une suite réelle telle qu'il existe un réel non nul M et un réel α vérifiant $u_n \sim \frac{M}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

- ☞ Sommation des relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence : *Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. Alors $U_n = \mathcal{O}(V_n)$, c'est à dire $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n = o(V_n)$. Enfin si $u_n \sim v_n$ et si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n \sim V_n$.*
Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et la série $\sum v_n$ soit convergente. Alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\Big)$. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\Big)$.
Enfin si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

Par exemple la sommation des relations d'équivalence (1.3) donne
$$\ln n \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.5}$$

La sommation des relations d'équivalence (1.4) pour $\alpha < 1$ donne

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \tag{1.6}$$

De même la sommation des relations d'équivalence (1.4) pour $\alpha > 1$ donne

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{1.7}$$

II.2 Comparaison à une série géométrique

Une série numérique géométrique a pour terme général $u_n = u_0 r^n$ où le réel non nul r est la raison de u. Pour $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\cdot$ Une série géométrique non nulle est convergente si et seulement si sa raison r vérifie $|r| < 1$. Lorsque cette condition est vérifiée $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{u_0}{1-r}\cdot$ Une série géométrique non nulle $\sum u_n$ est caractérisée par la relation $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$.

Proposition

Si u et v sont deux suites réelles à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

En particulier lorsque v est une suite géométrique, on a la

Proposition Règle de d'Alembert

Si u est une suite réelle à termes strictement positifs et s'il existe un réel $r < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$, alors $\sum u_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n = \mathcal{O}(r^n)$.

- ☞ La règle de d'Alembert s'applique notamment lorsque la suite u à termes strictement positifs est telle que la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel $\ell < 1$.
- ☞ lorsque $z \in \mathbb{C}^*$ la règle de d'Alembert s'applique pour $\sum \dfrac{|z|^n}{n!}$ (ici $\ell = 0$) si bien que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente. On appelle sa somme *exponentielle de* z.
- ☞ Lorsque la suite u à termes strictement positifs est telle qu'à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est croissante donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

II.3 Série et intégrale de fonction positive et décroissante

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0\,,\,+\infty[$ à valeurs dans $[0\,,\,+\infty[$ et décroissante. La série de terme général $v_n = f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ est convergente. En particulier la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$.

En effet cela résulte directement de l'encadrement $0 \leqslant v_n \leqslant u_n - u_{n+1}$ et du théorème de majoration des sommes partielles puisqu'alors $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant u_0$.

☞ Par exemple pour $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ le théorème ci-dessus permet de préciser l'équivalence (1.5) par la convergence de la suite de terme général $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2)$. La limite de cette suite s'appelle *constante d'Euler* et se note γ. On a ainsi un développement limité à l'ordre 0 de la somme de la série harmonique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \tag{1.8}$$

☞ Pour $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\ln^{\alpha}(t+2)}$, f est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$ si et seulement si le réel α est strictement supérieur à 1. Le théorème ci- dessus montre que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.