Séries Numériques II : cinq exercices

1 Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)}$$

.

Indication exercice 1

2 On donne la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \operatorname{cotan}(u_n) \end{cases}$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication exercice 2

3 Soit la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} (1 + \sqrt{p})}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente .
2) Déterminer la somme de la série $\sum u_n$.
3) Déterminer un équivalent de u_n à une constante près lorsque n tend vers plus l'infini .

Indication exercice 3

4 On donne deux suites réelles ou complexes u et v , on appelle S la suite réelle ou complexe définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k v_k$$

Soit V la "primitive " de la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, Vn = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} v_k$.

1) Montrer que : (Transformation d'Abel)

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_n V_n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (u_k - u_{k-1}) V_k$$

2) En déduire que si la suite V est bornée et si la suite u est réelle décroissante de limite nulle alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente .

3) Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin^2 k}{k^2}$ est une série convergente, déterminer la nature de la série de terme général le reste ;

$$R_n = \sum_{n+1 \leqslant k} \frac{\sin^2 k}{k^2}$$

Indication exercice 4

5 On pose $u_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k+1} \sqrt{k}$.

1) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2) Montrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$ admet une limite strictement positive .

3) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Indication exercice 5

Indications ou résultats

1 Indication exercice 1. [E]

Une idée peut être de chercher un équivalent de $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)$ lorsque n tend vers l'infini , on peut essayer de comparer avec une intégrale en explicitant le terme général et remplacer la variable k par une variable "continue" x et intégrer , puis espérer que les termes qui encadrent les expressions soient simples . On peut aussi essayer d'utiliser les sommations des relations de comparaison (Comment?).

Solution exercice 1

2 Indication exercice 2. [E]

On commence par étudier la suite , ne pas se jeter sur l'étude de la fonction sans réfléchir , ce n'est qu'un moyen pour étudier ce genre de suite . Pour l'équivalent , utiliser la méthode classique de $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$. Pour le reste , il faut «pousser» le développement limité .

Solution exercice 2

3 Indication exercice 3. [E]

1) Essayer de montrer «à la main» que $u_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

2) Utilisez des séries télescopiques.

3) On remarque que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ au voisinage de plus l'infini , puis essayer d'en déduire la forme de l'équivalent .

Solution exercice 3

4 Indication exercice 4. [E]

1) Il suffit de vérifier .

2) Montrer que la suite S est de Cauchy en majorant $|S_{n+p} - S_n|$ à l'aide la transformation d'Abel .

3) On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos(2k)$, montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée . En appliquant la transformation d'Abel ,montrer que :

$$\sum_{n+1\leqslant k} \frac{\cos 2k}{k^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En remarquant par exemple que ; $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k\,(k+1)}$,en déduire un équivalent de R_n.

Solution exercice 4

5 Indication exercice 5. [E]

1) Ce qui compte ce n'est pas la parité , c'est le fait que $(-1)^k$ change de signe avec la parité de k, il suffit de changer k en $k+1$.(Où ?)

2) Utiliser le théorème spécial des séries alternées .

3) On connaît le comportement asymptotique de $u_{n+1} - u_n$, je pense qu'il doit être possible de déterminer le comportement asymptotique de $u_{n+1} + u_n$, puis en déduire celui de u_n.

Solution exercice 5

Corrigés des exercices

1 Solution de l'exercice 1 . [E]

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)$,on cherche un équivalent , on forme la série "dérivée" de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$. On obtient $v_n = (n-1)\ln n! - 2\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln k!$, ce qui donne :

$$w_n = n\ln(n+1) - \ln n!$$

De même , $w_{n+1} - w_n = (n+1)\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$,or $\dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$,donc $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$,la série divergente de terme général $w_{n+1} - w_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang , on en déduit que les sommes partielles sont équivalentes , soit : $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} w_{k+1} - w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, soit $w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, or $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. De même

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} v_{k+1} - v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k$$

Ce qui donne $v_{n+1} - v_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n(n+1)}{2}$, d'où

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$$

On a alors $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$, la série de terme général $\dfrac{1}{v_n}$ est à termes positifs , son terme général est équivalent au terme général d'une série Riemannienne convergente , c'est donc une série convergente .

2 Solution de l'exercice 2. [E]

On sait que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < x < \tan(x)$, il suffit d'étudier l'application $x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,$0 < x^2 \operatorname{cotan}(x) < x$ Par une récurrence évidente ,on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et que $u_{n+1} < u_n$. La suite u est positive , décroissante , donc convergente dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,la suite u étant décroissante , sa limite l vérifie $l \leqslant u_0 < \frac{\pi}{2}$.Donc $l \neq \frac{\pi}{2}$. Par continuité des applications présentes , l vérifie

$$\begin{cases} l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ l = l^2 \operatorname{cotan}(l) \end{cases}$$

,d'où $l=0$. On cherche un réel α tel que $\exists k \neq 0, \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = k$. Or en effectuant un développement limité on obtient :

$$x^2 \operatorname{cotan}(x) \underset{x \to 0+}{=} x - \frac{x^3}{3} + O\left(x^5\right)$$

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + O\left(u_n^5\right)\right)^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + O\left(u_n^4\right)\right)^{\alpha} - 1\right)$$

$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = -\dfrac{\alpha}{3} u_n^{\alpha+2} + O\left(u_n^{\alpha+4}\right)$,on choisit $\alpha = -2$, ce qui donne :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3}$$

En appliquant soit Césaro , soit les sommations des relations de comparaison , on a

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n$$

Soit $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} n$ et enfin

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

Pour obtenir un terme de plus dans de développement , il faut connaître un équivalent de $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{2}{3}$ lorsque n tend vers l'infini. On a

$$x^2 \operatorname{cotan} x \underset{x \to 0+}{=} x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{45} + O\left(x^7\right)$$

Après calculs :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{3} - \frac{u_n^4}{45} + O\left(u_n^6\right)\right)^{-2} - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{17}{45} u_n^2 + O\left(u_n^4\right)$$

On a alors :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{17}{45} u_n^2$$

Or $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$,donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{17}{30n}$$

En réappliquant les relations de comparaison pour les séries positives divergentes , on obtient :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3}(n-1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{17}{30} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \frac{1}{k}$$

Or on sait que $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n-1)$,ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{u_n^2}=\frac{2n}{3}+\frac{17}{30}\ln n+o(\ln n)$$

car $\ln(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n}{3}+\frac{17}{30}\ln n+o(\ln n)\right)}}$$

$$u_n=\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{17}{20}\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}}\right)=\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(1-\frac{17}{40}\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Soit

$$u_n=\sqrt{\frac{3}{2n}}-\frac{17}{40}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$

---

3 Solution de l'exercice 3. [E]

1) On remarque qu'il y a un facteur de plus au dénominateur , on peut dire que : $\forall k\in\mathbb{N},\sqrt{k}\leqslant 1+\sqrt{k}$,ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n\leqslant\frac{1}{1+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$, cela montre que u_n tend vers 0 , si on veut montrer que $u_n=O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, il faut gagner deux "crans", c'est à dire comparer $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k-2}$ pour $k\geqslant 3$. $\sqrt{k}-\sqrt{k-2}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-2}}$, or $\sqrt{k}+\sqrt{k-2}\geqslant\sqrt{3}+1>2$ pour $k\geqslant 3$. D'où :

$$\forall k\geqslant 3,\sqrt{k}<1+\sqrt{k-2}$$

Donc $0<\displaystyle\prod_{3\leqslant k\leqslant n-1}\sqrt{k}<\prod_{3\leqslant k\leqslant n-1}\left(1+\sqrt{k-2}\right)$, ce qui donne :

$$\forall n\geqslant 3,0<u_n<\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{n-2}\right)\left(1+\sqrt{n-1}\right)\left(1+\sqrt{n}\right)}$$

On a montré que:

$$u_n=O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

D'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs ,on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente .

2) On remarque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}}$, soit

$$u_{n+1}\sqrt{n+1} - u_n\sqrt{n} = -u_{n+1}$$

On a affaire à une série télescopique , $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(u_{k+1}\sqrt{k+1} - u_k\sqrt{k}\right) = u_n\sqrt{n} - u_1$ D'où :

$$u_n\sqrt{n} - u_1 = -\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} u_{k+1}$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k = 2u_1 + u_n\sqrt{n}$$

$u_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$,donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\sum u_k = 1$$

3) Nous sommes dans le cas où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la série est à termes positifs , on cherche un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ dans le but d'appliquer les sommations des relations de comparaison .Par calculs :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

La série $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de signe constant divergente , on a :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par application des sommations de relations de comparaison , on en déduit que les sommes partielles sont équivalentes . Soit :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} -\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est positive , décroissante , de limite nulle , non intégrable , on sait que :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

On en déduit que :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$$

or $2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$,donc : On obtient :

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\sqrt{n}$$

Pour pouvoir passer à l'exponentielle , il faut connaître une estimation de la différence $\ln u_n - (-2\sqrt{n})$. On pose $v_n = \ln u_n - (-2\sqrt{n})$,on forme la série dérivée $\sum v_{n+1} - v_n$. Or :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{(3/2)} + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{n}\right)^{(5/2)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ est une série convergente , d'où la suite v converge vers un réel L. On obtient alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^L e^{-\sqrt{n}}$$

---

4 Solution de l'exercice 4. [E]

1) On pose $V_{-1} = 0$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k\left(V_k - V_{k-1}\right)$ Ce qui donne ; $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k V_k - \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} u_{k+1} V_k = u_n V_n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} \left(u_k - u_{k-1}\right) V_k$.

2) $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces complets , il suffit de montrer que la suite S est de Cauchy .

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} u_k\left(V_k - V_{k-1}\right) = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} u_k V_k - \sum_{n\leqslant k\leqslant n+p-1} u_{k+1} V_k$$

$S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} \left(u_k - u_{k+1}\right) V_k + u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n$ Si on note M un majorant de la suite $|V|$,on obtient :$|S_{n+p} - S_n| \leqslant M \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} |(u_k - u_{k+1})| + M\left(|u_{n+p}| + |u_{n+1}|\right)$ Or la suite u est décroissante , donc $\sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} |(u_k - u_{k+1})| = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} (u_k - u_{k+1}) = u_{n+1} - u_{n+p}$ La suite u est décroissante de limite nulle , elle est donc positive , d'où :

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant 2Mu_{n+1}$$

La suite u est de limite nulle , on en déduit que la suite S est de Cauchy , elle est donc convergente car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets . En faisant tendre p vers l'infini ,on en déduit une majoration du reste :

$$\left|\sum_{n+1\leqslant k} u_k v_k\right| \leqslant 2Mu_{n+1}$$

3)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos(2k) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} e^{2ik}\right) = \mathfrak{Re}\left(e^{2i}\left(\frac{1 - e^{2in}}{1 - e^{2i}}\right)\right)$$

Or

$$e^{2i}\left(\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)=e^{i}\left(\frac{1-e^{2in}}{e^{-i}-e^{i}}\right)=e^{i}\left(\frac{1-e^{2in}}{-2i\sin 1}\right)$$

D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |U_n|\leqslant\frac{1}{|\sin 1|}$$

La suite U est bornée , de plus la suite $k\mapsto\dfrac{1}{k^2}$ est réelle décroissante de limite nulle , on peut appliquer la transformation d'Abel , la série $\sum\dfrac{\cos 2k}{k^2}$ est une série convergente, de plus la valeur absolue de son reste est majorée par $\dfrac{2}{|\sin 1|}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ qui est bien de la forme $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On écrit que : $\forall k\in\mathbb{N}, \sin^2 k=\dfrac{1-\cos 2k}{2}$,la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente Riemannienne d'exposant 2 .On en déduit que la série de terme général $\dfrac{\sin^2 k}{k^2}$ est convergente comme somme de deux séries convergentes . De plus

$$R_n=\sum_{n+1\leqslant k}\frac{\sin^2 k}{k^2}=\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}-\sum_{n+1\leqslant k}\frac{\cos 2k}{2k^2}$$

Or $\dfrac{1}{2k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$, les deux séries sont convergentes , positives , on en déduit par sommation des relations de comparaison que les restes sont équivalents ,

$$\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

On a de plus , $\displaystyle\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2(n+1)}$,donc :

$$\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

Soit la suite s définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, s_n=\displaystyle\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2n}$, par développement limité , $s_{n+1}-s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^3}$, or en "intégrant " $\dfrac{1}{2n^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$,d'où :

$$s_{n+1}-s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

de nouveau par sommation des relations de comparaison , les restes sont équivalents , soit :

$$s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{4n^2}$$

On en déduit que $R_n = \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,d'où la série de terme général R_n diverge comme somme d'une série divergente et d'une série convergente . Remarque : On pouvait aussi utiliser :

$$\sum_{n+1 \leqslant k} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pour $\alpha > 1$.

5 Solution de l'exercice 5. [E]

Remarque générale : Dans les séries alternées , vous pouvez remarquer que quand on change k en $k+1$, le signe de $(-1)^k$ change .

1) On pose $u_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k+1} \sqrt{k}$,on a : $u_n = \sum\limits_{2 \leqslant k \leqslant n+1} (-1)^k \sqrt{k-1}$,d'où :

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k+1} \sqrt{k} + \sum_{2 \leqslant k \leqslant n+1} (-1)^k \sqrt{k-1} \right)$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{n+1} \sqrt{n} + \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k+1} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right) \right)$$

Or $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$,l'application $k \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$ est positive , décroissante de limite nulle , donc d'après le théorème spéciale des séries alternées , la série $\sum (-1)^{k+1} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)$ est convergente . D'où :

$$u_n = \frac{1}{2} \left((-1)^{n+1} \sqrt{n} + O(1) \right)$$

On a immédiatement :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sqrt{n}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$,pour étudier la suite v on va étudier la série "dérivée", la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_n = (-1)^{n+2} \sqrt{n+2} - (-1)^{n+1} \sqrt{n} = (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \right)$$

La série dérivée vérifie le théorème spéciale des séries alternées , la série est $\sum (v_{n+1} - v_n)$ convergente , ce qui entraîne que la suite v converge vers un réel l .On sait que le reste $\sum\limits_{1+n \leqslant k} w_k$ d'une série alternée est du signe de w_{n+1} et que $\left| \sum\limits_{1+n \leqslant k} w_k \right| \leqslant |w_{n+1}|$.

$\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)$ est du signe de v_2-v_1 et $\left|\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)\right| \leqslant |v_2-v_1|$. Or

$$v_2-v_1=\frac{-2}{\sqrt{3}+1}=-\left(\sqrt{3}-1\right)$$

,on a

$$\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)\geqslant\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Ce qui donne encore : $l-v_1\geqslant\sqrt{3}-1$, ou $l\geqslant\sqrt{3}-1+1+1-\sqrt{2}$,soit :

$$l\geqslant 1+\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$$

3)On a $u_{n+1}+u_n=l+o(1)$ et $u_{n+1}-u_n=(-1)^n\sqrt{n+1}$ On en déduit par soustraction :

$$2u_n=l+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}+o(1)$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2}{\left(l+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}+o(1)\right)}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}l}{\sqrt{n+1}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}l}{\sqrt{n+1}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{2l}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que : $\frac{1}{u_n}-\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2l}{n+1}$ avec $l>0$ La série $\sum\left(\frac{1}{u_n}-\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)$ est divergente , or la série $\sum\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergente car elle vérifie le théorème spécial des séries alternées , on en déduit que la série $\sum\frac{1}{u_n}$ est divergente comme somme d'une série divergente et d'une série convergente .