Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$, avec $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, avec $S_n(x) = \dfrac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n^{x+1}}$ (et x réel).

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[0,1[$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\ln S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \ln \dfrac{k}{n}$.

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire que $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, puis $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Si $x \leq -1$, on trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$.
- Si $-1 < x$, écrire $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

  Constater que f est monotone et intégrable sur $[0,1]$.

  En déduire que $S_n(x)$ est compris entre $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Obtenir finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{x+1}$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

L'application f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} = +\infty$.

Pour cette raison, on ne peut pas utiliser les sommes de Riemann.

En revanche, f est croissante ce qui nous permet de procéder par encadrements.

La croissance de f donne $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(On rappelle que f est intégrable au voisinage de 1, ce qui permet de considérer $k = n-1$.)

En sommant de $k=1$ à $k=n-1$, il vient $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \le S_n \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Autrement dit : $\arcsin\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big) \le S_n \le \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On constate que $\ln S_n = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}\ln\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{k}{n}$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ mais elle y est croissante.

Comme dans l'exercice précédent, on procède par encadrements.

Pour tout entier k de $\{1,\ldots,n-1\}$, on $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

(Rappel : $x \mapsto \ln x$ est intégrable au voisinage de 0, ce qui permet de considérer $k=1$.)

On en déduit par sommation $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \le S_n \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$.

Quand $n \to \infty$, les deux termes de l'encadrement tendent vers $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1$.

Ainsi $\ln S_n$ tend vers -1 et donc S_n vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ quand n tend vers ∞.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{k}} \le \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ pour tout $k \ge 2$.

Il en découle $\displaystyle\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \le S_n - 1 \le \int_1^{n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ par sommation de $k=2$ à $k=n$.

Autrement dit, pour tout $n \ge 2$: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \le S_n \le 2\sqrt{n} - 1$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$, c'est-à-dire $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Si $x < -1$: pour tout x, on a $S_n(x) \geq \dfrac{1}{n^{x+1}}$.

  Mais $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{x+1}} = +\infty$ si $x < -1$.

  On en déduit que si $x < -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$.

- Si $x = -1$: on a $S_n(-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et on sait que cette somme tend vers $+\infty$ avec n.

- Si $-1 < x$: on écrit $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

  L'application f est monotone sur $[0,1]$, et intégrable car $x > -1$.

  Plus précisément, $f'(t) = xt^{x-1}$: f est donc $\begin{cases} \text{décroissante si } -1 < x \leq 0 \\ \text{croissante si } x \geq 0 \end{cases}$

  Posons $I_k = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$: $y_k = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est donc compris entre I_{k-1} et I_k.

  Plus précisément, $\begin{cases} I_{k-1} \leq y_k \leq I_k \text{ si } f \text{ est croissante, c-à-d } x \geq 0 \\ I_{k-1} \geq y_k \geq I_k \text{ si } f \text{ est décroissante, c-à-d } x \leq 0 \end{cases}$.

  On somme pour $1 \leq k \leq n$.

  On en déduit que $S_n(x)$ est compris entre $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = I = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \dfrac{1}{x+1}$.

  Conclusion : si $x > -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{x+1}$.