



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

Montrer que f est convexe.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tout λ de \mathbb{R} et tout x de $[-1, 1]$, on a : $e^{\lambda x} \leq \text{ch } \lambda + x \text{ sh } \lambda$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient p, q dans \mathbb{R}^{+*} tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tous x, y de $]1, +\infty[$, montrer que $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soient $x < y$. Prouver que $\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}$, $f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$.

Se donner $\lambda \in [0, 1]$. Justifier l'existence de k_n de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $\frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$.

Utiliser alors la suite des $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$ et la continuité de f .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser la convexité de $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ sur $[-1, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, entre $x = a^p$ et $y = b^q$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'inégalité à prouver équivaut à $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$, avec $\varphi(t) = \ln \ln t$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y fixés, avec $x < y$. On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

Remarquons que pour $k = 0$ ou $k = 2^n$, cette inégalité est évidente (c'est même une égalité).

Si $n = 1$ la propriété se réduit à $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$: c'est l'hypothèse de l'énoncé.

On se donne un entier $n \geq 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang n .

Soit $k \in \{1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Posons $a_k = \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y$ et $b_k = \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)$.

Il s'agit de prouver l'inégalité $f(a_k) \leq b_k$.

– Supposons que k soit pair : $k = 2m$ avec $0 \leq m \leq 2^n$.

L'inégalité à démontrer se réduit donc à $f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(y)$.

Le résultat est donc une conséquence directe de l'hypothèse de récurrence.

– Supposons que k soit impair : $k = 2m + 1$ avec $0 \leq m \leq 2^n - 1$.

Alors $a_k = a_{2m+1} = \frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}$ et $b_k = \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

On sait d'après le cas précédent que $f(a_{2m}) \leq b_{2m}$ et $f(a_{2m+2}) \leq b_{2m+2}$.

L'énoncé donne $f(a_k) = f\left(\frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}\right) \leq \frac{f(a_{2m}) + f(a_{2m+2})}{2} \leq \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

Ainsi $f(a_k) \leq b_k$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On se donne maintenant un réel λ quelconque entre $[0, 1]$.

Pour tout n , il existe un plus grand entier k_n de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$.

La suite des λ_n est convergente vers λ car $0 \leq \lambda - \lambda_n < \frac{1}{2^n}$.

D'autre part, pour tout n de \mathbb{N} , on a $f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{cases}$$

La continuité de f donne alors $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

On a ainsi prouvé la convexité de l'application f .

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

L'application $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe (sa dérivée seconde $\lambda^2 e^{\lambda x}$ est positive.)

L'équation de la droite reliant les points d'abscisse -1 et 1 de la courbe $y = f(x)$ est :

$$y = g(x) \text{ avec } g(x) = f(-1) + (x+1) \frac{f(1) - f(-1)}{2} = e^{-\lambda} + (x+1) \operatorname{sh} \lambda = \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda$$

La convexité de f implique : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \leq g(x)$, ce qui est le résultat attendu.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour tous x, y dans \mathbb{R}^{+*} , on a $\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q}$ (concavité de $x \mapsto \ln x$.)

Si on applique ce résultat à $x = a^p$ et $y = b^q$, on trouve : $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln a + \ln b$.

Ainsi $\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ puis $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

Par composition avec $t \mapsto \ln t$, l'inégalité à prouver équivaut à $\ln \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \ln \sqrt{\ln x \ln y}$.

Cette inégalité s'écrit encore $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$ avec $\varphi(t) = \ln \ln t$.

Pour obtenir le résultat il suffit donc de vérifier la concavité de φ .

Celle-ci résulte de la décroissance de $t \mapsto \varphi'(t) = \frac{1}{t \ln t}$ sur $]1, +\infty[$.