Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall (x,y) \in I^2, f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout λ de $\mathbb{R}$ et tout x de $[-1,1]$, on a : $\mathrm{e}^{\lambda x} \leq \operatorname{ch}\lambda + x \operatorname{sh}\lambda$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient p, q dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Pour tous x, y de $]1, +\infty[$, montrer que $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Soient $x < y$. Prouver que $\forall k \in \{0, \ldots, 2^n\}, f\Big(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\Big) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (1 - \frac{k}{2^n})f(y)$.

Se donner $\lambda \in [0, 1]$. Justifier l'existence de k_n de $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tel que $\frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$.

Utiliser alors la suite des $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$ et la continuité de f.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la convexité de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $[-1, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, entre $x = a^p$ et $y = b^q$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'inégalité à prouver équivaut à $\varphi\Big(\frac{x + y}{2}\Big) \geq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$, avec $\varphi(t) = \ln \ln t$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y fixés, avec $x < y$. On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$\forall k \in \{0, \ldots, 2^n\}, f\Big(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\Big) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (1 - \frac{k}{2^n})f(y)$$

Remarquons que pour $k = 0$ ou $k = 2n$, cette inégalité est évidente (c'est même une égalité).

Si $n = 1$ la propriété se réduit à $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$: c'est l'hypothèse de l'énoncé.

On se donne un entier $n \geq 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang n.

Soit $k \in \{1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Posons $a_k = \dfrac{k}{2^{n+1}}x + (1 - \dfrac{k}{2^{n+1}})y$ et $b_k = \dfrac{k}{2^{n+1}}f(x) + (1 - \dfrac{k}{2^{n+1}})f(y)$.

Il s'agit de prouver l'inégalité $f(a_k) \leq b_k$.

- Supposons que k soit pair : $k = 2m$ avec $0 \leq m \leq 2^n$.

  L'inégalité à démontrer se réduit donc à $f\Big(\dfrac{m}{2^n}x + (1 - \dfrac{m}{2^n})y\Big) \leq \dfrac{m}{2^n}f(x) + (1 - \dfrac{m}{2^n})f(y)$.

  Le résultat est donc une conséquence directe de l'hypothèse de récurrence.

- Supposons que k soit impair : $k = 2m + 1$ avec $0 \leq m \leq 2^n - 1$.

  Alors $a_k = a_{2m+1} = \dfrac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}$ et $b_k = \dfrac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

  On sait d'après le cas précédent que $f(a_{2m}) \leq b_{2m}$ et $f(a_{2m+2}) \leq b_{2m+2}$.

  L'énoncé donne $f(a_k) = f\Big(\dfrac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}\Big) \leq \dfrac{f(a_{2m}) + f(a_{2m+2})}{2} \leq \dfrac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

  Ainsi $f(a_k) \leq b_k$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On se donne maintenant un réel λ quelconque entre $[0, 1]$.

Pour tout n, il existe un plus grand entier k_n de $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tel que $\lambda_n = \dfrac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \dfrac{k_n + 1}{2^n}$.

La suite des λ_n est convergente vers λ car $0 \leq \lambda - \lambda_n < \dfrac{1}{2^n}$.

D'autre part, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{cases}$

La continuité de f donne alors $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

On a ainsi prouvé la convexité de l'application f.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

L'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est convexe (sa dérivée seconde $\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ est positive.)

L'équation de la droite reliant les points d'abscisse -1 et 1 de la courbe $y = f(x)$ est :

$$y = g(x) \text{ avec } g(x) = f(-1) + (x+1)\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda} + (x+1)\operatorname{sh}\lambda = \operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda$$

La convexité de f implique : $\forall x \in [-1,1],\ f(x) \leq g(x)$, ce qui est le résultat attendu.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tous x, y dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln\Big(\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}\Big) \geq \dfrac{\ln x}{p} + \dfrac{\ln y}{q}$ (concavité de $x \mapsto \ln x$.)

Si on applique ce résultat à $x = a^p$ et $y = b^q$, on trouve : $\ln\Big(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\Big) \geq \ln a + \ln b$.

Ainsi $\ln(ab) \leq \ln\Big(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\Big)$ puis $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Par composition avec $t \mapsto \ln t$, l'inégalité à prouver équivaut à $\ln\ln\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \geq \ln\sqrt{\ln x \ln y}$.

Cette inégalité s'écrit encore $\varphi\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \geq \dfrac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$ avec $\varphi(t) = \ln\ln t$.

Pour obtenir le résultat il suffit donc de vérifier la concavité de φ.

Celle-ci résulte de la décroissance de $t \mapsto \varphi'(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$ sur $]1, +\infty[$.