



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la dérivée n -ième de $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$, avec $n \geq 1$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = \sin(x \cos \alpha) e^{x \sin \alpha}$.

On proposera deux démonstrations différentes.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On pose $y(x) = \arctan x$. Montrer que $y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin(ny + n\frac{\pi}{2})$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer les zéros de la dérivée n -ième de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout entier naturel n , établir que $\frac{d^n}{dx^n} \left[(4x)^{n+1/2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{\sqrt{x}} \right] = e^{\sqrt{x}}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On a $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$. Montrer par récurrence que $f_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $\frac{a_n}{x}$.
Vérifier que $a_{n+1} = n a_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode : remarquer que $f'(x) = \sin(\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}$.
Prouver par récurrence que $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}$.
- Deuxième méthode : remarquer que $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = e^{\omega x}$ et $\omega = e^{i\alpha}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Procéder par récurrence sur $n \geq 1$, en remarquant d'abord que $y' = \cos^2 y$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f(x) = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$.

En déduire $f^{(n)}(x) = \frac{i(-1)^n n! ((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$.

Chercher ensuite les zéros du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On trouve n solutions distinctes : les $x_k = -\cotan \theta_k$, avec $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $1 \leq k \leq n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Poser $y = e^{\sqrt{x}}$, $z_n = (4x)^{n+1/2} y^{(n+1)}$, puis établir $z_n^{(n)} = y$ par récurrence.

Pour cela, montrer que $4xy'' + 2y' - y = 0$, égalité qu'on dérivera n fois.

En déduire $z_1 + 2z_0 - 2y\sqrt{x} = 0$ et pour $n \geq 1$: $z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4z_{n-1} = 0$.

Enfin, dériver $n+1$ fois l'égalité précédente.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On vérifie que $f'_1(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $f''_2(x) = (x \ln x)'' = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = f_n^{(n)}(x) = \frac{a_n}{x}$.

C'est vrai si $n = 1$. Supposons que ce le soit pour un entier $n \geq 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (x f_n(x))^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) \\ &= x g'_n(x) + (n+1) g_n(x) = -\frac{a_n}{x} + \frac{(n+1)a_n}{x} = \frac{n a_n}{x} \end{aligned}$$

Ainsi il existe a_{n+1} tel que $g_{n+1}(x) = f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{a_{n+1}}{x}$, avec $a_{n+1} = n a_n$.

Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

De plus la relation $a_{n+1} = n a_n$ et l'égalité $a_1 = 1$ donnent $\forall n \geq 1$, $a_n = (n-1)!$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, on a $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On calcule la dérivée première de f :

$$f'(x) = ((\sin \alpha) \cos(x \sin \alpha) + (\cos \alpha) \sin(x \sin \alpha)) e^{x \cos \alpha} = \sin(\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}$$

Montrons que pour tout entier n , on a $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un entier $n \geq 0$ donné.

On en déduit :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} (\sin(n\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}) \\ &= ((\sin \alpha) \cos(n\alpha + x \sin \alpha) + (\cos \alpha) \sin(n\alpha + x \sin \alpha)) e^{x \cos \alpha} \\ &= \sin((n+1)\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha} \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Il y a une autre démonstration, qui utilise les fonctions à valeurs complexes.

On a en effet $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = e^{ix \sin \alpha} e^{x \cos \alpha} = e^{\omega x}$ avec $\omega = e^{i\alpha}$.

On a alors, pour tout n , $g^{(n)}(x) = \omega^n e^{\omega x} = e^{in\alpha} e^{\omega x} = \exp(i(n\alpha + x \cos \alpha)) e^{x \cos \alpha}$.

On en déduit, pour tout n de \mathbb{N} :

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{Im} g^{(n)}(x) = \operatorname{Im} \left(\exp(i(n\alpha + x \cos \alpha)) e^{x \cos \alpha} \right) = \sin(n\alpha + x \sin \alpha) e^{x \cos \alpha}.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a :

$$(n-1)! \cos^n y \sin(ny + n\frac{\pi}{2}) = \cos y \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} = y'(x)$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit au rang $n \geq 1$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned} y^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \frac{d}{dx} \left(\cos^n y \sin(ny + n\frac{\pi}{2}) \right) \\ &= (n-1)! y'(x) \left(-n \sin y \sin(ny + n\frac{\pi}{2}) + n \cos y \cos(ny + n\frac{\pi}{2}) \right) \cos^{(n-1)}(y) \\ &= n! \cos^2(y) \left(\cos((n+1)y + n\frac{\pi}{2}) \right) \cos^{(n-1)}(y) \\ &= n! \cos^{(n+1)}(y) \sin((n+1)y + (n+1)\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Ce qui établit la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

On utilise une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Pour tout x de \mathbb{R} , on a $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$.

On sait que la dérivée n -ième de $\frac{1}{x+\alpha}$ est $\frac{(-1)^n n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$. On en déduit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{i(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right) = \frac{i(-1)^n n! ((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$$

Les zéros de $f^{(n)}(x)$ sont donc ceux du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On note $w_k = \exp 2i\theta_k$, avec $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$, avec $0 \leq k \leq n$.

Les ω_k sont les $n+1$ racines $(n+1)$ -ièmes de l'unité (en particulier $z_0 = 1$.)

On rappelle que pour tout u, v dans \mathbb{C} , on a $u^{n+1} = v^{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n\}, u = \omega_k v$.

Pour tout z de \mathbb{C} , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\Leftrightarrow (z-i)^{n+1} = (z+i)^{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n\}, z-i = \omega_k(z+i) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}, z = i \frac{1 + \omega_k}{1 - \omega_k} = i \frac{1 + e^{2i\theta_k}}{1 - e^{2i\theta_k}} = -i \frac{2 \cos \theta_k}{2i \sin \theta_k} = -\cotan \theta_k \end{aligned}$$

Les θ_k forment une suite strictement croissante de $]0, \pi[$.

Ainsi $f^{(n)}$ possède n zéros distincts sur \mathbb{R} qui sont les $x_k = -\cotan \theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On pose $y = e^{\sqrt{x}}$, et $z_n = (4x)^{n+1/2}y^{(n+1)}$.

– On trouve tout d'abord $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$ puis $y'' = \frac{y'}{2\sqrt{x}} - \frac{y}{4x\sqrt{x}} = \frac{y}{4x} - \frac{y'}{2x}$.

On en déduit l'égalité $4xy'' + 2y' - y = 0$.

– On dérive n fois l'égalité précédente.

On trouve $4xy^{(n+2)} + 4ny^{(n+1)} + 2y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$ donc $4xy^{(n+2)} + (4n+2)y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$.

– On multiplie membre à membre par $(4x)^{n+1/2}$.

On trouve $(4x)^{n+3/2}y^{(n+2)} + (4n+2)(4x)^{n+1/2}y^{(n+1)} - 4x(4x)^{n-1/2}y^{(n)} = 0$.

Autrement dit :
$$\begin{cases} z_1 + 2z_0 - 2\sqrt{y} = 0 & \text{si } n = 0 \\ z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4xz_{n-1} = 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

– On dérive $n+1$ fois la dernière égalité. Pour tout n , on pose $Z_n = z_n^{(n)}$.

On trouve $z_{n+1}^{(n+1)} + (4n+2)z_n^{(n+1)} - 4xz_{n-1}^{(n+1)} - 4(n+1)z_{n-1}^{(n)} = 0$.

Autrement dit $Z_{n+1} + (4n+2)Z'_n - 4xZ''_{n-1} - 4(n+1)Z'_{n-1} = 0$.

– Il reste à montrer que $Z_n = y$ et pour cela on procède par récurrence sur n .

Tout d'abord $Z_0 = z_0 = 2\sqrt{x}y'(x)$ qui est bien égal à y .

D'autre part $Z_1 = z'_1 = (8x\sqrt{x}y'')'$ et on sait que $y'' = \frac{y'}{2x\sqrt{x}} - \frac{y}{4x\sqrt{x}}$.

On en déduit $8x\sqrt{x}y'' = 4xy' - 2y$ puis $(8x\sqrt{x}y'')' = 4xy'' + 2y' = y$.

Ainsi la propriété est vraie aux rangs $n=0$ et $n=1$.

Supposons qu'elle le soit aux rangs $n-1$ et n ($n \geq 1$ donné). Ainsi $Z_{n-1} = Z_n = y$.

Alors $Z_{n+1} + (4n+2)Z'_n - 4xZ''_{n-1} - 4(n+1)Z'_{n-1} = 0$ devient $Z_{n+1} = 4xy'' + 2y' = y$.

Cela établit la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.