



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On cherche une condition sur p, q pour que $A = X^3 + pX + q$ ait un zéro multiple.

On demande trois méthodes différentes...

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait un zéro double.

Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 8X^2 + (13 - \lambda)X - 6 - 2\lambda$ ait un zéro double.

Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Déterminer m, n, p pour que $A = x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ ait une racine quadruple.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow A$ et A' ont une racine commune.
Cela équivaut à dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1 \dots$
2. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow A$ et A' ont une racine commune.
Or les racines de A' sont $\pm\omega$ avec $\omega^2 = -\frac{p}{3} \dots$
3. Soient a, b, c les racines de A . On pose $\varphi = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.
Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.
On exprime ensuite φ en fonction des coefficients de A .

Dans tous les cas, on arrive à la condition : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Soient a, b, c les racines de P . On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant $a = c$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont $0, -3, 125$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

Si A possède une racine quadruple a , alors a annule $A, A', A'',$ et $A^{(3)}$.

Montrer que a est racine quadruple si et seulement si $a^3 = 1, m = -\frac{15}{2}a^2, n = -6a^2, p = \frac{5}{2}$.

Discuter alors suivant les trois valeurs possibles de a .

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Première méthode

$A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow A$ et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.

Dire que A et A' ont une racine commune, c'est dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1$.

Or $3A = XA' + (2pX + 3q)$. Donc $A \wedge A' = A' \wedge (2pX + 3q)$.

Remarquons que si $p = 0$ alors la condition est $q = 0$. On peut donc supposer $p \neq 0$.

On obtient alors $4p^2A' = (2pX + 3q)(6pX - 9q) + 4p^3 + 27q^2$.

Ainsi $A \wedge A' = (2pX + 3q) \wedge (4p^3 + 27q^2)$.

La condition sur le pgcd s'écrit ici $4p^3 + 27q^2 = 0$ (c'est compatible avec le cas $p = 0$.)

Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

2. Deuxième méthode

$A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow A$ et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.

Mais A' possède deux racines ω et $-\omega$, avec $\omega^2 = -\frac{p}{3}$.

On constate que $A(\omega) = \omega\omega^2 + p\omega + q = \frac{2p}{3}\omega + q$. De même, $A(-\omega) = \frac{-2p}{3}\omega + q$.

Il reste à exprimer que $A(\omega) = 0$ ou $A(-\omega) = 0$, ce qui se résume à $A(\omega)A(-\omega) = 0$.

Or $A(\omega)A(-\omega) = \left(\frac{2p}{3}\omega + q\right)\left(-\frac{2p}{3}\omega + q\right) = q^2 - \frac{4p^2}{9}\omega^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$.

Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$.

3. Troisième méthode

Soient a, b, c les racines de $A = X^3 + pX + q$. On pose $\varphi = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$.

φ est une fonction symétrique de a, b, c . On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$, $\sigma_3 = -q$.

Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.

Il reste à exprimer φ en fonction des coefficients de A .

On remarque que $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$. Or $a + b + c = 0$ et $abc = -q$.

Il en découle (en supposant $c \neq 0$) que $(a - b)^2 = c^2 + 4\frac{q}{c} = \frac{c^3 + 4q}{c} = \frac{-pc + 3q}{c}$.

Finalement, on trouve φ en fonction de p et q (en supposant $q = -abc \neq 0$) :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{abc}(-pa + 3q)(-pb + 3q)(-pc + 3q) \\ &= \frac{1}{\sigma_3}(-p^3\sigma_3 + 3qp^2\sigma_2 - 9q^2p\sigma_1 + 27q^3) = -(4p^3 + 27q^2)\end{aligned}$$

Si $q = 0$, et par exemple si $a = 0$, alors $b + c = 0$ et $bc = p$.

Dans ces conditions on a encore $\varphi = b^2c^2(b - c)^2 = p^2(-4bc) = -4p^3 = -(4p^3 + 27q^2)$.

Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

Or les racines $P' = 3(X^2 - 1)$ sont -1 et 1 .

D'autre part $P(-1) = \lambda + 2$ et $P(1) = \lambda - 2$.

La condition de l'énoncé équivaut donc à $\lambda \in \{-2, 2\}$.

– Si $\lambda = -2$ alors $P = X^3 - 3X - 2 = (X + 1)^2(X - 2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}$.

– Si $\lambda = 2$ alors $P = X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Soient a, b, c les racines de P . On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant la condition $a = c$. Il reste alors à trouver λ pour que ce système ait des solutions :

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ ab + ac + bc = 13 - \lambda \\ abc = 6 + 2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 8 \\ a^2 + 2ab = 13 - \lambda \\ a^2b = 6 + 2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - 2a \\ a^2 + 2a(8 - 2a) = 13 - \lambda \\ a^2(8 - 2a) = 6 + 2\lambda \\ c = a \end{cases}$$

Il reste donc à trouver λ pour que le système $\begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 2a^3 - 8a^2 = -6 - 2\lambda \end{cases}$ ait une solution a .

On remarque que $a = 0$ ne peut pas convenir. On peut donc opérer des réductions de degré en utilisant a comme pivot (les systèmes obtenus sont équivalents) :

$$\begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 2a^3 - 8a^2 = -6 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 4a^2 + (\lambda - 13)a = -9 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ (3\lambda + 25)a = 25 - 13\lambda \end{cases}$$

Il reste à exprimer que $a = \frac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25}$ est solution de $3a^2 - 16a = \lambda - 13$.

Cela équivaut à : $3(25 - 13\lambda)^2 - 16(25 - 13\lambda)(3\lambda + 25) = (\lambda - 13)(3\lambda + 25)^2$.

Cela s'écrit $9(\lambda^3 - 122\lambda^2 - 375\lambda) = 0$ ou encore $\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 125) = 0$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont donc $0, -3, 125$.

– Si $\lambda = 0$, on trouve $a = c = \frac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = 1$, puis $b = 8 - 2a = 6$.

Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 13X - 6 = (X - 1)^2(X - 6)$.

– Si $\lambda = -3$, on trouve $a = c = \frac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = 4$, puis $b = 8 - 2a = 0$.

Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 16X = X(X - 4)^2$.

– Si $\lambda = 125$, on trouve $a = c = \frac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = -4$, puis $b = 8 - 2a = 16$.

Effectivement $P = X^3 - 8X^2 - 112X - 256 = (X - 16)(X + 4)^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Si le polynôme A possède une racine quadruple a , alors a est une racine de $A, A', A'', A^{(3)}$.

Or $A''(x) = 6x(5x^3 + 2mx + 10)$ et $A^{(3)}(x) = 12(10x^3 + 2mx + 5)$.

La valeur $a = 0$ ne convient pas car $A^{(3)}(0) \neq 0$.

Ainsi a vérifie $\begin{cases} 5a^3 + 2ma + 10 = 0 \\ 10a^3 + 2ma + 5 = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 2ma + 15 = 0 \\ a^3 = 1 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} m = -\frac{15}{2}a^2 \\ a^3 = 1 \end{cases}$

Réciproquement, avec ces données,

$$\begin{cases} A(a) = a^6 + ma^4 + 10a^3 + na + p = 1 + ma + 10 + na + p = na + p + \frac{7}{2} \\ A'(a) = 6a^5 + 4ma^3 + 30a^2 + n = 36a^2 + 4m + n = 36a^2 - 30a^2 + n = 6a^2 + n \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} A(a) = 0 \\ A'(a) = 0 \end{cases}$ est donc équivalent à $\begin{cases} n = -6a^2 \\ p = 6a^3 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$

Conclusion : le polynôme A admet une racine quadruple a si et seulement si on a les conditions

$$a^3 = 1, \quad m = -\frac{15}{2}a^2, \quad n = -6a^2, \quad p = \frac{5}{2}$$

Il y a donc trois cas, suivant que $a = 1, a = j$ ou $a = j^2$.

On constate effectivement qu'avec la condition $a^3 = 1$, on a la factorisation :

$$\begin{aligned} x^6 - \frac{15}{2}a^2x^4 + 10x^3 - 6a^2x + \frac{5}{2} &= (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4)(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2) \\ &= (x - a)^4(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2) \end{aligned}$$

- Dans le cas $a = 1$, on trouve $m = -\frac{15}{2}, n = -6$ et $p = \frac{5}{2}$.

$$\text{On a effectivement : } A(x) = x^6 - \frac{15}{2}x^4 + 10x^3 - 6x + \frac{5}{2} = (x - 1)^4(x^2 + 4x + \frac{5}{2}).$$

- Dans le cas $a = j$, on trouve $m = -\frac{15}{2}j^2, n = -6j^2$ et $p = \frac{5}{2}$.

$$\text{On a effectivement : } A(x) = x^6 - \frac{15}{2}j^2x^4 + 10x^3 - 6j^2x + \frac{5}{2} = (x - j)^4(x^2 + 4jx + \frac{5}{2}j^2).$$

- Dans le cas $a = j^2$, on trouve $m = -\frac{15}{2}j, n = -6j$ et $p = \frac{5}{2}$.

$$\text{On a effectivement : } A(x) = x^6 - \frac{15}{2}jx^4 + 10x^3 - 6jx + \frac{5}{2} = (x - j^2)^4(x^2 + 4j^2x + \frac{5}{2}j).$$