Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

On cherche une condition sur p, q pour que $A = X^3 + pX + q$ ait un zéro multiple.

On demande trois méthodes différentes...

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait un zéro double.
Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 8X^2 + (13 - \lambda)X - 6 - 2\lambda$ ait un zéro double.
Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Déterminer m, n, p pour que $A = x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ ait une racine quadruple.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et A' ont une racine commune.
   Cela équivaut à dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1 \ldots$
2. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et A' ont une racine commune.
   Or les racines de A' sont $\pm\omega$ avec $\omega^2 = -\dfrac{p}{3} \ldots$
3. Soient a, b, c les racines de A. On pose $\varphi = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.
   Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.
   On exprime ensuite φ en fonction des coefficients de A.

Dans tous les cas, on arrive à la condition : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant $a = c$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont $0, -3, 125$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Si A possède une racine quadruple a, alors a annule A, A', A'', et $A^{(3)}$.

Montrer que a est racine quadruple si et seulement si $a^3 = 1, m = -\frac{15}{2}a^2, n = -6a^2, p = \frac{5}{2}$.

Discuter alors suivant les trois valeurs possibles de a.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. *Première méthode*

   $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.
   Dire que A et A' ont une racine commune, c'est dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1$.
   Or $3A = XA' + (2pX + 3q)$. Donc $A \wedge A' = A' \wedge (2pX + 3q)$.
   Remarquons que si $p = 0$ alors la condition est $q = 0$. On peut donc supposer $p \neq 0$.
   On obtient alors $4p^2 A' = (2pX + 3q)(6pX - 9q) + 4p^3 + 27q^2$.
   Ainsi $A \wedge A' = (2pX + 3q) \wedge (4p^3 + 27q^2)$.
   La condition sur le pgcd s'écrit ici $4p^3 + 27q^2 = 0$ (c'est compatible avec le cas $p = 0$.)
   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

2. *Deuxième méthode*

   $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.
   Mais A' possède deux racines ω et $-\omega$, avec $\omega^2 = -\dfrac{p}{3}$.
   On constate que $A(\omega) = \omega\omega^2 + p\omega + q = \dfrac{2p}{3}\omega + q$. De même, $A(-\omega) = \dfrac{-2p}{3}\omega + q$.
   Il reste à exprimer que $A(\omega) = 0$ ou $A(-\omega) = 0$, ce qui se résume à $A(\omega)A(-\omega) = 0$.
   Or $A(\omega)A(-\omega) = \Big(\dfrac{2p}{3}\omega + q\Big)\Big(-\dfrac{2p}{3}\omega + q\Big) = q^2 - \dfrac{4p^2}{9}\omega^2 = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$.
   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ $4p^3 + 27q^2 = 0$.

3. *Troisième méthode*

   Soient a, b, c les racines de $A = X^3 + pX + q$. On pose $\varphi = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.
   φ est une fonction symétrique de a, b, c. On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$, $\sigma_3 = -q$.
   Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.
   Il reste à exprimer φ en fonction des coefficients de A.
   On remarque que $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$. Or $a + b + c = 0$ et $abc = -q$.
   Il en découle (en supposant $c \neq 0$) que $(a-b)^2 = c^2 + 4\dfrac{q}{c} = \dfrac{c^3 + 4q}{c} = \dfrac{-pc + 3q}{c}$.
   Finalement, on trouve φ en fonction de p et q (en supposant $q = -abc \neq 0$) :

   $$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{abc}(-pa + 3q)(-pb + 3q)(-pc + 3q)\\ &= \frac{1}{\sigma_3}(-p^3\sigma_3 + 3qp^2\sigma_2 - 9q^2p\sigma_1 + 27q^3) = -(4p^3 + 27q^2)\end{aligned}$$

   Si $q = 0$, et par exemple si $a = 0$, alors $b + c = 0$ et $bc = p$.
   Dans ces conditions on a encore $\varphi = b^2c^2(b-c)^2 = p^2(-4bc) = -4p^3 = -(4p^3 + 27q^2)$.
   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ $4p^3 + 27q^2 = 0$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

Or les racines $P' = 3(X^2 - 1)$ sont -1 et 1.

D'autre part $P(-1) = \lambda + 2$ et $P(1) = \lambda - 2$.

La condition de l'énoncé équivaut donc à $\lambda \in \{-2, 2\}$.
- Si $\lambda = -2$ alors $P = X^3 - 3X - 2 = (X+1)^2(X-2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}$.
- Si $\lambda = 2$ alors $P = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant la condition $a = c$. Il reste alors à trouver λ pour que ce système ait des solutions :

$$\begin{cases} a+b+c = 8 \\ ab+ac+bc = 13-\lambda \\ abc = 6+2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 8 \\ a^2+2ab = 13-\lambda \\ a^2b = 6+2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8-2a \\ a^2+2a(8-2a) = 13-\lambda \\ a^2(8-2a) = 6+2\lambda \\ c = a \end{cases}$$

Il reste donc à trouver λ pour que le système $\begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 2a^3 - 8a^2 = -6 - 2\lambda \end{cases}$ ait une solution a.

On remarque que $a = 0$ ne peut pas convenir. On peut donc opérer des réductions de degré en utilisant a comme pivot (les systèmes obtenus sont équivalents) :

$$\begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 2a^3 - 8a^2 = -6 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ 4a^2 + (\lambda - 13)a = -9 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 16a = \lambda - 13 \\ (3\lambda + 25)a = 25 - 13\lambda \end{cases}$$

Il reste à exprimer que $a = \dfrac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25}$ est solution de $3a^2 - 16a = 13 - \lambda$.

Cela équivaut à : $3(25-13\lambda)^2 - 16(25-13\lambda)(3\lambda+25) = (\lambda - 13)(3\lambda + 25)^2$.

Cela s'écrit $9(\lambda^3 - 122\lambda^2 - 375\lambda) = 0$ ou encore $\lambda(\lambda+3)(\lambda-125) = 0$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont donc $0, -3, 125$.
- Si $\lambda = 0$, on trouve $a = c = \dfrac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = 1$, puis $b = 8 - 2a = 6$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 13X - 6 = (X-1)^2(X-6)$.
- Si $\lambda = -3$, on trouve $a = c = \dfrac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = 4$, puis $b = 8 - 2a = 0$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 16X = X(X-4)^2$.
- Si $\lambda = 125$, on trouve $a = c = \dfrac{25 - 13\lambda}{3\lambda + 25} = -4$, puis $b = 8 - 2a = 16$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 - 112X - 256 = (X-16)(X+4)^2$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si le polynôme A possède une racine quadruple a, alors a est une racine de $A, A', A'', A^{(3)}$.

Or $A''(x) = 6x(5x^3 + 2mx + 10)$ et $A^{(3)}(x) = 12(10x^3 + 2mx + 5)$.

La valeur $a = 0$ ne convient pas car $A^{(3)}(0) \neq 0$.

Ainsi a vérifie $\begin{cases} 5a^3 + 2ma + 10 = 0 \\ 10a^3 + 2ma + 5 = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 2ma + 15 = 0 \\ a^3 = 1 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} m = -\dfrac{15}{2}a^2 \\ a^3 = 1 \end{cases}$

Réciproquement, avec ces données,

$$\begin{cases} A(a) = a^6 + ma^4 + 10a^3 + na + p = 1 + ma + 10 + na + p = na + p + \dfrac{7}{2} \\ A'(a) = 6a^5 + 4ma^3 + 30a^2 + n = 36a^2 + 4m + n = 36a^2 - 30a^2 + n = 6a^2 + n \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} A(a) = 0 \\ A'(a) = 0 \end{cases}$ est donc équivalent à $\begin{cases} n = -6a^2 \\ p = 6a^3 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Conclusion : le polynôme A admet une racine quadruple a si et seulement si on a les conditions

$$a^3 = 1, \quad m = -\frac{15}{2}a^2, \quad n = -6a^2, \quad p = \frac{5}{2}$$

Il y a donc trois cas, suivant que $a = 1$, $a = j$ ou $a = j^2$.

On constate effectivement qu'avec la condition $a^3 = 1$, on a la factorisation :

$$\begin{aligned} x^6 - \frac{15}{2}a^2x^4 + 10x^3 - 6a^2x + \frac{5}{2} &= (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4)\Big(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2\Big) \\ &= (x-a)^4\Big(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2\Big) \end{aligned}$$

– Dans le cas $a = 1$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}$, $n = -6$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

  On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}x^4 + 10x^3 - 6x + \dfrac{5}{2} = (x-1)^4\Big(x^2 + 4x + \dfrac{5}{2}\Big)$.

– Dans le cas $a = j$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}j^2$, $n = -6j^2$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

  On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}j^2x^4 + 10x^3 - 6j^2x + \dfrac{5}{2} = (x-j)^4\Big(x^2 + 4jx + \dfrac{5}{2}j^2\Big)$.

– Dans le cas $a = j^2$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}j$, $n = -6j$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

  On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}jx^4 + 10x^3 - 6jx + \dfrac{5}{2} = (x-j^2)^4\Big(x^2 + 4j^2x + \dfrac{5}{2}j\Big)$.