Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Combien y-a-t-il de surjections de E vers F si $\mathrm{card}(E) = n + 1$ et $\mathrm{card}(F) = n$?
Même question avec $\mathrm{card}(E) = n + 2$ et avec $\mathrm{card}(E) = n + 3$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit E_p un ensemble de cardinal p.
Soit $\mathcal{F}_{p,n}$ l'ensemble des applications $f : E_p \to \mathbb{N}$ telles que $\sum\limits_{x \in E} f(x) \le n$.
Montrer que le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$ est C_{n+p}^{p}. On donnera deux démonstrations.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre :

1. De relations sur E.
2. De relations réflexives sur E.
3. De relations symétriques sur E.
4. De relations réflexives et symétriques sur E.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \ldots, m\}$.

1. Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est $n\mathrm{C}_{n+1}^2\,(n-1)! = \dfrac{n}{2}(n+1)!$
2. Le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est $\dfrac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$
3. Le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est $\dfrac{n^2(n+1)}{48}(n+3)!$

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode*

  Par récurrence sur p. On vérifie que la propriété est vraie si $p = 1$.

  Soit $p \geq 2$. On suppose que la propriété est vraie pour tout k de $\{0, \ldots, p-1\}$ (et tout n).

  Soit f une application de E_{p+1} dans $\mathbb{N}$.

  Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

  On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1)\ldots$

– *Deuxième méthode*

  A toute application $f : E_p \longrightarrow \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par :

  $\forall k \in \{1, \ldots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + k$.

  On vérifie que g est strictement croissante et que la correspondance $f \mapsto g$ est biunivoque.

  Il suffit donc de compter le nombre d'applications strictement croissantes de $E_p \to E_{n+p}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Le nombre de relations sur E est 2^{n^2}.
2. Il y a 2^{n^2-n} relations réflexives sur E.
3. Il y a $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E.
4. Il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Dans tout cet exercice, et pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \ldots, m\}$.

1. Pour construire une surjection f de E_{n+1} vers E_n, il faut :
   - Choisir l'élément y de E_n qui va posséder deux antécédents.
   - Choisir la paire $\{a, b\}$ des antécédents de y dans E_{n+1}.
   - Etablir une bijection entre les $n-1$ éléments de $E_{n+1} \setminus \{a, b\}$ et ceux de $E_n \setminus \{y\}$.

   Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est donc : $n\mathrm{C}_{n+1}^2\,(n-1)! = \dfrac{n}{2}(n+1)!$
2. Soit f une surjection de E_{n+2} sur E_n.

   Deux cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.
   - *Premier cas* :

     Il existe un élément y de E_n qui possède 3 antécédents distincts a, b, c.

     Il y a n manières de choisir y, puis C_{n+2}^3 manières de choisir $\{a, b, c\}$.

     Il y a ensuite $(n-1)!$ bijections de $E_{n+2} \setminus \{a, b, c\}$ sur $E_n \setminus \{y\}$.

     Le nombre de solutions dans ce premier cas est donc : $n\mathrm{C}_{n+2}^3\,(n-1)! = \dfrac{n}{6}(n+2)!$.
   - *Deuxième cas* :

     Il existe deux éléments distincts y, z de E_n, ayant chacun deux antécédents.

     Supposons par exemple $y < z$ pour éviter de compter une même solution deux fois.

     Il y a C_n^2 manières de choisir le couple (y, z).

     Il y a ensuite C_{n+2}^2 manières de choisir les deux antécédents a, b de y.

     Puis il y a C_n^2 manières de choisir les deux antécédents c, d de z, dans $E_{n+2} \setminus \{a, b\}$.

     Il y a enfin $(n-2)!$ bijections entre $E_{n+2} \setminus \{a, b, c, d\}$ et $E_n \setminus \{y, z\}$.

     Le second cas donne donc $\mathrm{C}_n^2\,\mathrm{C}_{n+2}^2\,\mathrm{C}_n^2\,(n-2)! = \dfrac{n(n-1)}{8}\,(n+2)!$ solutions.
   - Finalement, le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est :

     $$\begin{aligned}\frac{n}{6}(n+2)! + \frac{n(n-1)}{8}(n+2)! &= \frac{(n+2)!}{24}(3n(n-1) + 4n) \\ &= \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!\end{aligned}.$$
3. Soit f une surjection de E_{n+3} sur E_n.

   Trois cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.
   - *Premier cas* :

     Il existe un élément y de E_n ayant quatre antécédents distincts.

On choisit y, puis ses quatre antécédents, puis on met en bijection les $n-1$ éléments restant de part et d'autre. Il y a : $n\mathrm{C}_{n+3}^{4}(n-1)! = n\dfrac{(n+3)!}{4!}$ possibilités distinctes.

– *Deuxième cas* :

Il existe un élément y ayant trois antécédents et un autre élément z ayant deux antécédents.

Il faut choisir y, puis ses trois antécédents parmi $n+3$, puis z dans $E_n - \{y\}$ puis les deux antécédents de z parmi les n éléments encore disponibles.

Il reste enfin à mettre en bijection les $n-2$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est

$$n(n-1)\mathrm{C}_{n+3}^{3}\,\mathrm{C}_{n}^{2}\,(n-2)! = \frac{n(n-1)}{12}(n+3)!$$

– *Troisième cas* :

Il existe trois éléments y, z, t de E_n ayant chacun deux antécédents.

Supposons $y < z < t$ pour éviter de compter plusieurs fois une même solution.

Il y a C_{n}^{3} manières de choisir $\{y, z, t\}$ dans E_n.

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de y parmi $n+3$, puis ceux de z parmi $n+1$ puis ceux de t parmi $n-1$, avant de mettre en bijection les $n-3$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est :

$$\mathrm{C}_{n}^{3}\,\mathrm{C}_{n+3}^{2}\,\mathrm{C}_{n+1}^{2}\,\mathrm{C}_{n-1}^{2}\,(n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{48}\,(n+3)!$$

– Finalement, le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est :

$$n\left(\frac{1}{24} + \frac{n-1}{12} + \frac{(n-1)(n-2)}{48}\right)(n+3)! = \frac{n^2(n+1)}{48}(n+3)!$$

– Il faut avoir la présence d'esprit de vérifier pour des valeurs simples de n.

Par exemple, avec $n = 1$ on trouve une seule solution (il n'y a qu'une application de E_4 dans E_1 et elle est surjective.)

Pour $n = 2$, on trouve la valeur 30 : il y a en effet $2^5 = 32$ applications de E_5 dans E_2, et il faut éliminer les deux applications constantes qui sont les seules à ne pas être surjectives.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour simplifier les notations, on note $E_p = \{1, \ldots, p\}$.

$\mathcal{F}_{p,n}$ est l'ensemble des $f : E_p \to \mathbb{N}$ telles que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n$.

Notons $\lambda_{p,n}$ le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$.

L'énoncé demande donc de prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{p,n} = \mathrm{C}_{n+p}^{p}$.

- *Première méthode*

  On prouve le résultat par récurrence sur p. La propriété est vraie si $p = 1$ car $\lambda_{1,n} = n + 1$ (les solutions sont les applications définies en 1 par $f(1) = k$, avec $0 \leq k \leq n$).

  Soit p un entier ≥ 2. On suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers k de $\{0, \ldots, p-1\}$ (et pour tous les entiers n).

  Soit f une application de E_{p+1} dans $\mathbb{N}$.

  Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

  On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1)$, qui est quelconque dans $\{0, \ldots, n\}$.

  On constate donc que $\lambda_{p+1,n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_{p,k}$.

  Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on trouve :

  $$\begin{aligned}\lambda_{p+1,n} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_{k+p+1}^{p+1} - \mathrm{C}_{k+p}^{p+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{C}_{k+p}^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p+1} = 1 + \mathrm{C}_{n+p+1}^{p+1} - \mathrm{C}_{p+1}^{p+1} = \mathrm{C}_{n+p+1}^{p+1}\end{aligned}$$

  Ce qui démontre la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

- *Deuxième méthode*

  A toute application $f : E_p \to \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \to \mathbb{N}^*$ définie par :

  $\forall k \in \{1, \ldots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + k$: g est strictement croissante.

  En effet : $\forall k \in \{2, \ldots, p\}, g(k) - g(k-1) = f(k) + 1 > 0$.

  Réciproquement, soit g une application strictement croissante de E_p dans $\mathbb{N}^*$.

  Alors g est l'image (au sens de la correspondance précédente) d'une unique application f de E_p dans $\mathbb{N}$, et cette application est définie par :

  $f(1) = g(1) - 1$ et $\forall k \in \{2, \ldots, p\},\ f(k) = g(k) - g(k-1) - 1$.

  Par construction on a bien sûr $g(p) = f(1) + f(2) + \ldots + f(p) + p$.

  La condition $f(1) + f(2) + \ldots + f(p) \leq n$ équivaut donc à $g(p) \leq n + p$.

  Cette correspondance bijective montre donc qu'il y a autant d'éléments dans $\mathcal{F}_{p,n}$ qu'il y a d'applications strictement croissantes de E_p dans E_{n+p}.

  Or une application strictement croissante de E_p dans E_{n+p} est déterminée de manière unique par son ensemble image, c'est-à-dire par une partie quelconque à p éléments de E_{n+p}. Il y a donc C_{n+p}^{p} solutions distinctes, ce qui achève la démonstration.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Une relation sur E est une partie de $E \times E$, et $\text{Card}\,(E \times E) = n^2$.

   Le nombre de relations sur E est donc 2^{n^2}.

2. On note $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ la "diagonale" de $E \times E$.

   Une relation réflexive sur E est une partie de $E \times E$ qui contient Δ.

   Choisir une telle relation, c'est en fait choisir une partie de $(E \times E) \setminus \Delta$, et cet ensemble est de cardinal $n^2 - n$.

   Il y a donc 2^{n^2-n} relations réflexives sur E.

3. Posons $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour fixer les idées. Une relation symétrique sur E est une partie G de $E \times E$ telle que : $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G$.

   La partie G est déterminée par son intersection avec $\Delta^+ = \{(x, y) \in E \times E, x \leq y\}$ dont le cardinal est $\dfrac{1}{2}n(n + 1)$.

   Il y a donc $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E.

4. Une relation réflexive et symétrique sur E est entièrement déterminée par son intersection avec $\Delta^{++} = \{(x, y) \in E \times E, x < y\}$ dont le cardinal est $\dfrac{1}{2}n(n - 1)$.

   Il y a donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E.