Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient n, p, q, r, s des entiers naturels, avec $p \leq r$, $q \leq s$, $n \leq r + s$.
Montrer que $\sum\limits_{p+q=n} \mathrm{C}_r^p \mathrm{C}_s^q = \mathrm{C}_{r+s}^n$.
En déduire la somme des carrés des coefficients du binôme.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient n, p deux entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$.
Montrer que $\mathrm{C}_n^0 \mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_n^1 \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^p \mathrm{C}_{n-p}^0 = 2^p \mathrm{C}_n^p$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On se donne trois entiers n, p, q tels que $0 \leq q \leq p \leq n$.

Montrer que $\sum\limits_{k=q}^{n-p+q} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{n-k}^{p-q} = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout entier naturel n, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = 2^{2n}$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser les développements de $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\mathrm{C}_n^k\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \mathrm{C}_n^p\,\mathrm{C}_p^k$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les applications croissantes f de $\{0,\ldots,p\}$ dans $\{0,\ldots,n\}$ et discuter suivant la valeur de $f(q)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $2^k = \sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q$ et l'exercice précédent.

On sera aussi amené à utiliser $\sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On a le développement $(1+x)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} \mathrm{C}_{r+s}^{i}\, x^i$. Le coefficient de x^n est C_{r+s}^{n}.

On peut aussi écrire : $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = \left[\sum_{j=0}^{r} \mathrm{C}_{r}^{j}\, x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{s} \mathrm{C}_{s}^{k}\, x^k\right]$.

Dans le développement de ce produit, le coefficient de x^n est : $\sum_{p+q=n} \mathrm{C}_{r}^{p}\,\mathrm{C}_{s}^{q}$.

Si on identitie avec le coefficient de x^n dans $(1+x)^{r+s}$, on obtient l 'égalité demandée.

Dans ce résultat, on pose $r = s = n$.

On trouve alors : $\mathrm{C}_{2n}^{n} = \sum_{p+q=n} \mathrm{C}_{n}^{p}\,\mathrm{C}_{n}^{q} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_{n}^{p}\,\mathrm{C}_{n}^{n-p}$.

Or $\mathrm{C}_{n}^{p} = \mathrm{C}_{n}^{n-p}$. On en déduit finalement : $\sum_{p=0}^{n} (\mathrm{C}_{n}^{p})^2 = \mathrm{C}_{2n}^{n}$.

Bien sûr ce dernier résultat s'obtient directement en identifiant les coefficients de x^n dans les développements de $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\mathrm{C}_{n}^{k}\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,\frac{p!}{k!(p-k)!} = \mathrm{C}_{n}^{p}\,\mathrm{C}_{p}^{k}.$$

La somme demandée s'écrit donc : $\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n}^{k}\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n}^{p}\,\mathrm{C}_{p}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{p} \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{p}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{p}\, 2^p$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Il y a C_{n+1}^{p+1} manières différentes de choisir une application strictement croissante f de $\{0,\ldots,p\}$ dans $\{0,\ldots,n\}$, car f est déterminée de manière unique par l'ensemble des images $\{f(j), 0 \le j \le p\}$, c'est-à-dire par une partie à $p+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments.

On peut également calculer le cardinal de $\mathcal{F}$ en fixant la valeur $k = f(q)$.

- Il faut choisir $f(0),\ldots,f(q-1)$ distincts dans $\{0,\ldots,k-1\}$, ce qui exige $k \ge q$ et peut se faire de C_{k}^{q} manières différentes.
- Il faut poser $f(q) = k$.
- Il faut choisir les $p-q$ images distinctes $f(q+1),\ldots,f(p)$ dans $\{k+1,\ldots,n\}$ (ensemble à $n-k$ éléments), ce qui exige $n-k \ge p-q$ c'est-à-dire $k \le n-p+q$ et peut se faire de C_{n-k}^{p-q} manières différentes.

En considérant toutes les valeurs possibles de $k = f(q)$ (de $k = q$ à $k = n-p+q$) on voit que le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à la somme $\sum_{k=q}^{n-p+q} \mathrm{C}_{k}^{q}\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-q}$, ce qui établit le résultat demandé.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'indication suggère de s'orienter vers une somme de produits de coefficients binomiaux.

La seule manière de le faire est d'utiliser $2^k = \sum\limits_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q$.

On écrit donc : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n \left[\sum\limits_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q\right] = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{q=0}^{k} \mathrm{C}_{2n-k}^n \mathrm{C}_k^q$

L'interversion des deux sommes donne $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum\limits_{q=0}^{n}\sum\limits_{k=q}^{n} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{2n-k}^n$

En adaptant les notations, avec $N = 2n$ et $p = n + q$, l'exercice précédent donne :

$$\sum_{k=q}^{n} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{2n-k}^n = \sum_{k=q}^{N-p+q} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{N-k}^{p-q} = \mathrm{C}_{N+1}^{p+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^{n+q+1}.$$

Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum\limits_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{n+q+1} = \sum\limits_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

Or $\mathrm{C}_{2n+1}^q = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-q}$ et si q parcourt $\{n+1, \ldots, 2n+1\}$, $2n+1-q$ parcourt $\{0, \ldots, n\}$.

On peut donc écrire $\sum\limits_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \sum\limits_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-q} = \sum\limits_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

En prenant la demi-somme des deux résultats obtenus, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \frac{1}{2}\left[\sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q + \sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q\right] = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}.$$