



## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $n, p, q, r, s$  des entiers naturels, avec  $p \leq r, q \leq s, n \leq r + s$ .

Montrer que  $\sum_{p+q=n} C_r^p C_s^q = C_{r+s}^n$ .

En déduire la somme des carrés des coefficients du binôme.

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $n, p$  deux entiers naturels, avec  $0 \leq p \leq n$ .

Montrer que  $C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + \dots + C_n^p C_{n-p}^0 = 2^p C_n^p$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne trois entiers  $n, p, q$  tels que  $0 \leq q \leq p \leq n$ .

Montrer que  $\sum_{k=q}^{n-p+q} C_k^q C_{n-k}^{p-q} = C_{n+1}^{p+1}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = 2^{2n}$ .



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser les développements de  $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser  $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^p C_p^k$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'ensemble  $\mathcal{F}$  de toutes les applications croissantes  $f$  de  $\{0, \dots, p\}$  dans  $\{0, \dots, n\}$  et discuter suivant la valeur de  $f(q)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Utiliser  $2^k = \sum_{q=0}^k C_k^q$  et l'exercice précédent.

On sera aussi amené à utiliser  $\sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On a le développement  $(1+x)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} C_{r+s}^i x^i$ . Le coefficient de  $x^n$  est  $C_{r+s}^n$ .

On peut aussi écrire :  $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = \left[ \sum_{j=0}^r C_r^j x^j \right] \left[ \sum_{k=0}^s C_s^k x^k \right]$ .

Dans le développement de ce produit, le coefficient de  $x^n$  est :  $\sum_{p+q=n} C_r^p C_s^q$ .

Si on identifie avec le coefficient de  $x^n$  dans  $(1+x)^{r+s}$ , on obtient l'égalité demandée.

Dans ce résultat, on pose  $r = s = n$ .

On trouve alors :  $C_{2n}^n = \sum_{p+q=n} C_n^p C_n^q = \sum_{p=0}^n C_n^p C_n^{n-p}$ .

Or  $C_n^p = C_n^{n-p}$ . On en déduit finalement :  $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2 = C_{2n}^n$ .

Bien sûr ce dernier résultat s'obtient directement en identifiant les coefficients de  $x^n$  dans les développements de  $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ , on a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} = C_n^p C_p^k.$$

La somme demandée s'écrit donc :  $\sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_n^p C_p^k = C_n^p \sum_{k=0}^p C_p^k = C_n^p 2^p$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Il y a  $C_{n+1}^{p+1}$  manières différentes de choisir une application strictement croissante  $f$  de  $\{0, \dots, p\}$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , car  $f$  est déterminée de manière unique par l'ensemble des images  $\{f(j), 0 \leq j \leq p\}$ , c'est-à-dire par une partie à  $p+1$  éléments dans un ensemble à  $n+1$  éléments.

On peut également calculer le cardinal de  $\mathcal{F}$  en fixant la valeur  $k = f(q)$ .

- Il faut choisir  $f(0), \dots, f(q-1)$  distincts dans  $\{0, \dots, k-1\}$ , ce qui exige  $k \geq q$  et peut se faire de  $C_k^q$  manières différentes.
- Il faut poser  $f(q) = k$ .
- Il faut choisir les  $p-q$  images distinctes  $f(q+1), \dots, f(p)$  dans  $\{k+1, \dots, n\}$  (ensemble à  $n-k$  éléments), ce qui exige  $n-k \geq p-q$  c'est-à-dire  $k \leq n-p+q$  et peut se faire de  $C_{n-k}^{p-q}$  manières différentes.

En considérant toutes les valeurs possibles de  $k = f(q)$  (de  $k = q$  à  $k = n-p+q$ ) on voit que

le cardinal de  $\mathcal{F}$  est égal à la somme  $\sum_{k=q}^{n-p+q} C_k^q C_{n-k}^{p-q}$ , ce qui établit le résultat demandé.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

L'indication suggère de s'orienter vers une somme de produits de coefficients binomiaux.

La seule manière de le faire est d'utiliser  $2^k = \sum_{q=0}^k C_k^q$ .

On écrit donc :  $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n \left[ \sum_{q=0}^k C_k^q \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^k C_{2n-k}^n C_k^q$

L'interversion des deux sommes donne  $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^n \sum_{k=q}^n C_k^q C_{2n-k}^n$

En adaptant les notations, avec  $N = 2n$  et  $p = n + q$ , l'exercice précédent donne :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q C_{2n-k}^n = \sum_{k=q}^{N-p+q} C_k^q C_{N-k}^{p-q} = C_{N+1}^{p+1} = C_{2n+1}^{n+q+1}.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n+q+1} = \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q.$$

Or  $C_{2n+1}^q = C_{2n+1}^{2n+1-q}$  et si  $q$  parcourt  $\{n+1, \dots, 2n+1\}$ ,  $2n+1-q$  parcourt  $\{0, \dots, n\}$ .

$$\text{On peut donc écrire } \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^{2n+1-q} = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q.$$

En prenant la demi-somme des deux résultats obtenus, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \frac{1}{2} \left[ \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q + \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q \right] = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n}.$$