

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $n$  un entier naturel. Calculer les sommes :

$$- A = C_n^0 + 2C_n^2 + \dots + 2^p C_n^{2p} + \dots$$

$$- B = C_n^1 + 2C_n^3 + \dots + 2^p C_n^{2p+1} + \dots$$

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\text{Calculer } A = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = \sum_{k=1}^n kC_n^k.$$

On donnera trois méthodes différentes !

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\text{Calculer } B = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}C_n^k.$$

On donnera deux méthodes différentes !

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ calculer } A = C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + n^2C_n^n = \sum_{k=1}^n k^2C_n^k.$$

On donnera deux méthodes différentes !

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels. Prouver que  $\sum_{k=n}^p C_k^n = C_{p+1}^{n+1}$ .

On donnera trois méthodes différentes !

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de  $(1+x)^n$ , avec  $x = \pm\sqrt{2}$ .

On trouve  $A = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)$  et  $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ .

– Deuxième méthode : Dériver  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ .

– Troisième méthode :

$$A = \sum_{k=0}^n kC_n^k = \sum_{X \subset E} \text{Card } X \quad (\text{somme étant étendue à toutes les parties } X \text{ de } E).$$

$$\text{Mais on peut aussi écrire } A = \sum_{X \subset E} \text{Card } \bar{X}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser  $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ .

– Deuxième méthode : Intégrer  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser  $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ .

– Deuxième méthode : Dériver deux fois  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Par récurrence sur  $p$ , à  $n$  fixé.

– Deuxième méthode : Utiliser  $C_k^n = C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}$ .

– Troisième méthode :

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des parties de  $\{1, 2, \dots, p+1\}$  qui ont  $n+1$  éléments.

Faire un dénombrement des  $X$  de  $\mathcal{A}$  suivant la valeur de  $\max(X)$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On utilise le développement de  $(1+x)^n$ , avec  $x = \pm\sqrt{2}$ . On trouve en effet :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n (\sqrt{2})^k C_n^k \\ &= C_n^0 + \sqrt{2}C_n^1 + 2C_n^2 + 2\sqrt{2}C_n^3 + 2^2C_n^4 + 2^2\sqrt{2}C_n^5 + \dots \\ &= A + B\sqrt{2} \end{aligned}$$

De même,  $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$ .

On en déduit :  $A = \frac{1}{2} ((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$  et  $B = \frac{1}{2\sqrt{2}} ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– *Première méthode :*

$$\text{On a } A = \sum_{k=1}^n kC_n^k. \text{ Or } kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\text{On en déduit } A = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n2^{n-1}.$$

– *Deuxième méthode :*

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on sait que } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

$$\text{Si on dérive cette égalité par rapport à } x, \text{ on trouve : } \forall x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}.$$

$$\text{En particulier avec } x = 1, \text{ on obtient : } \sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}.$$

– *Troisième méthode :*

$C_n^k$  est le nombre de parties à  $k$  éléments de  $E = \{1, \dots, n\}$ .

$$\text{Donc } A = \sum_{k=0}^n kC_n^k = \sum_{X \subset E} \text{Card } X \text{ (somme étant étendue à toutes les parties } X \text{ de } E).$$

Or quand  $X$  décrit  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\bar{X}$  décrit lui aussi  $\mathcal{P}(E)$ .

On peut donc également écrire :

$$A = \sum_{X \subset E} \text{Card } \bar{X} = \sum_{X \subset E} (n - \text{Card } X) = n \sum_{X \subset E} 1 - \sum_{X \subset E} \text{Card } X = n2^n - A.$$

On retrouve donc bien  $A = n2^{n-1}$ .

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

– Première méthode :

Comme pour  $A$ , on note que  $(n+1)C_n^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}$  donc  $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ .

$$\text{Ainsi : } B = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

– Deuxième méthode :

On intègre l'égalité  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$  entre 0 et  $x$ .

$$\text{On trouve } \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

$$\text{On donne à } x \text{ la valeur } 1 \text{ et on obtient : } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

Première méthode :

$$\text{On note que } C = \sum_{k=1}^n k C_n^k + \sum_{k=1}^n k(k-1) C_n^k = \sum_{k=1}^n k C_n^k + \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k.$$

$$\text{Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, } A = \sum_{k=1}^n k C_n^k = n2^{n-1}.$$

$$\text{D'autre part, pour tout } k \geq 2 : k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k = n(n-1) \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$\text{On en déduit } C = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Deuxième méthode :

$$\text{On dérive deux fois } f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

$$\begin{cases} f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} \\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2} \end{cases}$$

En particulier, avec  $x = 1$  :

$$f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k \quad \text{et} \quad f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k.$$

On démarre la deuxième somme à  $k = 1$ . On ajoute les deux sommes et on trouve :

$$C = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = f'(1) + f''(1) = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

## – Première méthode

On procède par récurrence sur  $p$ , à  $n$  fixé.

On constate que la propriété est vraie si  $p = n$  (c'est le pas initial.)

Supposons qu'elle le soit pour un certain entier  $p \geq n$ . Alors, au rang  $p + 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{p+1} C_k^n &= \sum_{k=n}^p C_k^n + C_{p+1}^n \\ &= C_{p+1}^{n+1} + C_{p+1}^n \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= C_{p+2}^{n+1} \quad (\text{triangle de Pascal}) \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang  $p + 1$  et donc achève la récurrence.

## – Deuxième méthode

On utilise là encore la propriété qui est à la base du triangle de Pascal.

Pour tout entier  $k > n$ , on a :  $C_k^n = C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^p C_k^n &= C_n^n + \sum_{k=n+1}^p C_k^n = 1 + \sum_{k=n+1}^p (C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^p C_{k+1}^{n+1} - \sum_{k=n+1}^p C_k^{n+1} = 1 + \sum_{k=n+2}^{p+1} C_k^{n+1} - \sum_{k=n+1}^p C_k^{n+1} \\ &= 1 + C_{p+1}^{n+1} - C_{n+1}^{n+1} = C_{p+1}^{n+1} \end{aligned}$$

## – Troisième méthode

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des parties de  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$  qui ont  $n + 1$  éléments.

On sait que le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est  $C_{p+1}^{n+1}$ .

Si  $X$  est un élément de  $\mathcal{A}$ , alors  $\max(X) \in \{n + 1, \dots, p + 1\}$ .

On note  $\mathcal{A}_k$  le sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  formé des parties d'élément maximum  $k + 1$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}$  est la réunion disjointe des  $\mathcal{A}_k$ , pour  $n \leq k \leq p$ .

Pour former un élément de  $\mathcal{A}_k$ , c'est-à-dire une partie  $X$  de  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$  ayant  $n + 1$  éléments et telle que  $\max(X) = k + 1$ , il faut bien entendu choisir arbitrairement  $n$  éléments parmi  $\{1, 2, \dots, k\}$ , ce qui peut se faire de  $C_k^n$  façons différentes.

Ainsi  $\text{Card } \mathcal{A}_k = C_k^n$  et de plus  $\text{Card } \mathcal{A} = \sum_{k=n}^p \text{Card } \mathcal{A}_k$ . On en déduit  $C_{p+1}^{n+1} = \sum_{k=n}^p C_k^n$ .