Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes :

- $A = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^p\mathrm{C}_n^{2p} + \cdots$.
- $B = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + 2^p\mathrm{C}_n^{2p+1} + \cdots$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $A = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$.

On donnera trois méthodes différentes !

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $B = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$.

On donnera deux méthodes différentes !

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Pour tout entier naturel n, calculer $A = \mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k$.

On donnera deux méthodes différentes !

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient n et p deux entiers naturels. Prouver que $\sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{p+1}^{n+1}$.

On donnera trois méthodes différentes !

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$.

On trouve $A = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ et $B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.
- *Deuxième méthode* : Dériver $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.
- *Troisième méthode* :
  $A = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum_{X\subset E} \operatorname{Card} X$ (somme étant étendue à toutes les parties X de E.).
  Mais on peut aussi écrire $A = \sum_{X\subset E} \operatorname{Card} \overline{X}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.
- *Deuxième méthode* : Intégrer $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.
- *Deuxième méthode* : Dériver deux fois $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Par récurrence sur p, à n fixé.
- *Deuxième méthode* : Utiliser $\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}$.
- *Troisième méthode* :
  Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ qui ont $n+1$ éléments.
  Faire un dénombrement des X de $\mathcal{A}$ suivant la valeur de $\max(X)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$. On trouve en effet :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{2})^k \mathrm{C}_n^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 + \sqrt{2}\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^3 + 2^2\mathrm{C}_n^4 + 2^2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^5 + \cdots \\ &= A + B\sqrt{2}\end{aligned}$$

De même, $(1-\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$.

On en déduit : $A = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ et $B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode* :

On a $A = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$. Or $k\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

On en déduit $A = n\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} = n2^{n-1}$.

– *Deuxième méthode* :

Pour tout réel x, on sait que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Si on dérive cette égalité par rapport à x, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$.

En particulier avec $x = 1$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

– *Troisième méthode* :

C_n^k est le nombre de parties à k éléments de $E = \{1, \ldots, n\}$.

Donc $A = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum_{X \subset E} \operatorname{Card} X$ (somme étant étendue à toutes les parties X de E.)

Or quand X décrit $\mathcal{P}(E)$, $\overline{X}$ décrit lui aussi $\mathcal{P}(E)$.

On peut donc également écrire :

$A = \sum_{X \subset E} \operatorname{Card} \overline{X} = \sum_{X \subset E} (n - \operatorname{Card} X) = n\sum_{X \subset E} 1 - \sum_{X \subset E} \operatorname{Card} X = n2^n - A$.

On retrouve donc bien $A = n2^{n-1}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode* :

Comme pour A, on note que $(n+1)\mathrm{C}_n^k = (k+1)\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ donc $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

Ainsi : $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

– *Deuxième méthode* :

On intègre l'égalité $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$ entre 0 et x.

On trouve $\dfrac{1}{n+1}((1+x)^{n+1}-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$.

On donne à x la valeur 1 et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Première méthode :

On note que $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k + \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k$.

Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

D'autre part, pour tout $k \geq 2$: $k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{C}_{n-2}^{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

On en déduit $C = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

Deuxième méthode :

On dérive deux fois $f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

$$\begin{cases} f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1} \\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k x^{k-2} \end{cases}$$

En particulier, avec $x = 1$:

$f'(1) = n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$ et $f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k$.

On démarre la deuxième somme à $k = 1$. On ajoute les deux sommes et on trouve :

$C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k = f'(1) + f''(1) = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode*

On procède par récurrence sur p, à n fixé.

On constate que la propriété est vraie si $p = n$ (c'est le pas initial.)

Supposons qu'elle le soit pour un certain entier $p \geq n$. Alors, au rang $p+1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{p+1} \mathrm{C}_k^n &= \sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n + \mathrm{C}_{p+1}^n \\ &= \mathrm{C}_{p+1}^{n+1} + \mathrm{C}_{p+1}^n \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathrm{C}_{p+2}^{n+1} \quad \text{(triangle de Pascal)}\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et donc achève la récurrence.

– *Deuxième méthode*

On utilise là encore la propriété qui est à la base du triangle de Pascal.

Pour tout entier $k > n$, on a : $\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n &= \mathrm{C}_n^n + \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^n = 1 + \sum_{k=n+1}^{p} \left(\mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^{n+1} = 1 + \sum_{k=n+2}^{p+1} \mathrm{C}_k^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^{n+1} \\ &= 1 + \mathrm{C}_{p+1}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} = \mathrm{C}_{p+1}^{n+1}\end{aligned}$$

– *Troisième méthode*

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ qui ont $n+1$ éléments.

On sait que le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$ est C_{p+1}^{n+1}.

Si X est un élément de $\mathcal{A}$, alors $\max(X) \in \{n+1, \ldots, p+1\}$.

On note $\mathcal{A}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des parties d'élément maximum $k+1$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{A}_k$, pour $n \leq k \leq p$.

Pour former un élément de $\mathcal{A}_k$, c'est-à-dire une partie X de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ ayant $n+1$ éléments et telle que $\max(X) = k+1$, il faut bien entendu choisir arbitrairement n éléments parmi $\{1, 2, \ldots, k\}$, ce qui peut se faire de C_k^n façons différentes.

Ainsi $\operatorname{Card} \mathcal{A}_k = \mathrm{C}_k^n$ et de plus $\operatorname{Card} \mathcal{A} = \sum_{k=n}^{p} \operatorname{Card} \mathcal{A}_k$. On en déduit $\mathrm{C}_{p+1}^{n+1} = \sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021