

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes :

$$- A = C_n^0 + 2C_n^2 + \cdots + 2^p C_n^{2p} + \cdots.$$

$$- B = C_n^1 + 2C_n^3 + \cdots + 2^p C_n^{2p+1} + \cdots.$$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit n un entier naturel non nul.

$$\text{Calculer } A = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = \sum_{k=1}^n kC_n^k.$$

On donnera trois méthodes différentes !

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit n un entier naturel non nul.

$$\text{Calculer } B = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}C_n^k.$$

On donnera deux méthodes différentes !

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ calculer } A = C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n = \sum_{k=1}^n k^2C_n^k.$$

On donnera deux méthodes différentes !

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

$$\text{Soient } n \text{ et } p \text{ deux entiers naturels. Prouver que } \sum_{k=n}^p C_k^n = C_{p+1}^{n+1}.$$

On donnera trois méthodes différentes !

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$.

On trouve $A = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)$ et $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

– Deuxième méthode : Dériver $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

– Troisième méthode :

$$A = \sum_{k=0}^n kC_n^k = \sum_{X \subset E} \text{Card } X \text{ (somme étant étendue à toutes les parties } X \text{ de } E).$$

$$\text{Mais on peut aussi écrire } A = \sum_{X \subset E} \text{Card } \bar{X}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

– Deuxième méthode : Intégrer $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Utiliser $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

– Deuxième méthode : Dériver deux fois $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : Par récurrence sur p , à n fixé.

– Deuxième méthode : Utiliser $C_k^n = C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}$.

– Troisième méthode :

Soit \mathcal{A} l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, p+1\}$ qui ont $n+1$ éléments.

Faire un dénombrement des X de \mathcal{A} suivant la valeur de $\max(X)$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$. On trouve en effet :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n (\sqrt{2})^k C_n^k \\ &= C_n^0 + \sqrt{2}C_n^1 + 2C_n^2 + 2\sqrt{2}C_n^3 + 2^2C_n^4 + 2^2\sqrt{2}C_n^5 + \dots \\ &= A + B\sqrt{2} \end{aligned}$$

De même, $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$.

On en déduit : $A = \frac{1}{2} ((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$ et $B = \frac{1}{2\sqrt{2}} ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– *Première méthode :*

$$\text{On a } A = \sum_{k=1}^n kC_n^k. \text{ Or } kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\text{On en déduit } A = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n2^{n-1}.$$

– *Deuxième méthode :*

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on sait que } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

$$\text{Si on dérive cette égalité par rapport à } x, \text{ on trouve : } \forall x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}.$$

$$\text{En particulier avec } x = 1, \text{ on obtient : } \sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}.$$

– *Troisième méthode :*

C_n^k est le nombre de parties à k éléments de $E = \{1, \dots, n\}$.

$$\text{Donc } A = \sum_{k=0}^n kC_n^k = \sum_{X \subset E} \text{Card } X \text{ (somme étant étendue à toutes les parties } X \text{ de } E).$$

Or quand X décrit $\mathcal{P}(E)$, \bar{X} décrit lui aussi $\mathcal{P}(E)$.

On peut donc également écrire :

$$A = \sum_{X \subset E} \text{Card } \bar{X} = \sum_{X \subset E} (n - \text{Card } X) = n \sum_{X \subset E} 1 - \sum_{X \subset E} \text{Card } X = n2^n - A.$$

On retrouve donc bien $A = n2^{n-1}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

– Première méthode :

Comme pour A , on note que $(n+1)C_n^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}$ donc $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

$$\text{Ainsi : } B = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

– Deuxième méthode :

On intègre l'égalité $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ entre 0 et x .

$$\text{On trouve } \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On donne à x la valeur 1 et on obtient : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

Première méthode :

$$\text{On note que } C = \sum_{k=1}^n k C_n^k + \sum_{k=1}^n k(k-1) C_n^k = \sum_{k=1}^n k C_n^k + \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k.$$

Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, $A = \sum_{k=1}^n k C_n^k = n2^{n-1}$.

D'autre part, pour tout $k \geq 2$: $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

$$\text{Donc } \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k = n(n-1) \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k = n(n-1)2^{n-2}.$$

On en déduit $C = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

Deuxième méthode :

$$\text{On dérive deux fois } f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

$$\begin{cases} f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} \\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2} \end{cases}$$

En particulier, avec $x = 1$:

$$f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k \quad \text{et} \quad f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k.$$

On démarre la deuxième somme à $k = 1$. On ajoute les deux sommes et on trouve :

$$C = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = f'(1) + f''(1) = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

– Première méthode

On procède par récurrence sur p , à n fixé.

On constate que la propriété est vraie si $p = n$ (c'est le pas initial.)

Supposons qu'elle le soit pour un certain entier $p \geq n$. Alors, au rang $p + 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{p+1} C_k^n &= \sum_{k=n}^p C_k^n + C_{p+1}^n \\ &= C_{p+1}^{n+1} + C_{p+1}^n \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= C_{p+2}^{n+1} \quad (\text{triangle de Pascal})\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $p + 1$ et donc achève la récurrence.

– Deuxième méthode

On utilise là encore la propriété qui est à la base du triangle de Pascal.

Pour tout entier $k > n$, on a : $C_k^n = C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^p C_k^n &= C_n^n + \sum_{k=n+1}^p C_k^n = 1 + \sum_{k=n+1}^p (C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^p C_{k+1}^{n+1} - \sum_{k=n+1}^p C_k^{n+1} = 1 + \sum_{k=n+2}^{p+1} C_k^{n+1} - \sum_{k=n+1}^p C_k^{n+1} \\ &= 1 + C_{p+1}^{n+1} - C_{n+1}^{n+1} = C_{p+1}^{n+1}\end{aligned}$$

– Troisième méthode

Soit \mathcal{A} l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, p + 1\}$ qui ont $n + 1$ éléments.

On sait que le cardinal de l'ensemble \mathcal{A} est C_{p+1}^{n+1} .

Si X est un élément de \mathcal{A} , alors $\max(X) \in \{n + 1, \dots, p + 1\}$.

On note \mathcal{A}_k le sous-ensemble de \mathcal{A} formé des parties d'élément maximum $k + 1$.

L'ensemble \mathcal{A} est la réunion disjointe des \mathcal{A}_k , pour $n \leq k \leq p$.

Pour former un élément de \mathcal{A}_k , c'est-à-dire une partie X de $\{1, 2, \dots, p + 1\}$ ayant $n + 1$ éléments et telle que $\max(X) = k + 1$, il faut bien entendu choisir arbitrairement n éléments parmi $\{1, 2, \dots, k\}$, ce qui peut se faire de C_k^n façons différentes.

Ainsi $\text{Card } \mathcal{A}_k = C_k^n$ et de plus $\text{Card } \mathcal{A} = \sum_{k=n}^p \text{Card } \mathcal{A}_k$. On en déduit $C_{p+1}^{n+1} = \sum_{k=n}^p C_k^n$.