



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tous entiers n, p tels que $2 \leq p \leq n - 2$: $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

On donnera deux démonstrations distinctes (sans utiliser la formule donnant les C_n^k .)

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

1. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

2. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Quel est le terme maximum dans le développement de $(17 + 38)^{23}$?



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal.
- Par dénombrement, on se donne un ensemble E ayant $n \geq 2$ éléments, et $a \neq b$ dans E .
On utilise a et b pour dénombrer les parties X de E ayant p éléments.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. $0 = (1 - 1)^n$
2. Nommer A et B les deux sommes. Utiliser $A + B$ et $A - B$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer le terme général $u_k = C_{23}^k 17^k 38^{n-k}$ du développement.

Étudier le rapport $\frac{u_k}{u_{k-1}}$. Le coefficient maximum est u_7 .

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– On peut utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal. On a en effet :

$$\begin{aligned} C_n^p &= C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = (C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1}) + (C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}) \\ &= C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} \end{aligned}$$

– Il y a une autre méthode utilisant un calcul de dénombrement.

Soit E un ensemble ayant n éléments, avec $n \geq 2$.

Soient a et b deux éléments fixés dans E .

On se propose de dénombrer les parties X de E ayant p éléments, avec $p \geq 2$.

On sait qu'il y a C_n^p solutions X distinctes.

Chacune d'elles figure dans l'un et dans l'un seulement des cas suivants :

- X ne contient ni a ni b . Il y a C_{n-2}^p solutions possibles (choisir p éléments parmi les $n-2$ éléments de E qui sont distincts de a et b .)
 - X contient a mais il ne contient pas b . Il reste à choisir $p-1$ éléments parmi ceux de E qui sont distincts de a et b : il y a C_{n-2}^{p-1} choix possibles.
 - X contient b mais pas a . Là encore il y a C_{n-2}^{p-1} solutions.
 - X contient a et b . Il y a C_{n-2}^{p-2} manières de choisir les $p-2$ autres éléments dans $E \setminus \{a, b\}$.
- Enfinement, le décompte ainsi opéré donne : $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. On développe $0 = (1-1)^n$ par la formule du binôme.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$$

2. On sait que $A = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

On vient de voir que $B = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

On en déduit, par demi-somme et demi-différence :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = \frac{A+B}{2} = 2^{n-1}.$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = \frac{A-B}{2} = 2^{n-1}.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que dans un ensemble fini E non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair (si l'ensemble E est lui-même de cardinal impair, on s'en rend compte de manière évidente en considérant la bijection $A \mapsto \bar{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même.)



CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

On écrit $(17 + 38)^{23} = \sum_{k=0}^{23} u_k$, avec $u_k = C_{23}^k 17^k 38^{23-k} = \frac{23!}{k!(23-k)!} 17^k 38^{23-k}$.

Pour tout k de $\{1, \dots, 23\}$, on a : $\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{24-k}{k} \frac{17}{38}$.

On en déduit : $u_k \geq u_{k-1} \Leftrightarrow 17(24-k) \geq 38k \Leftrightarrow k \leq \frac{408}{55} \Leftrightarrow k \leq 7$.

Ainsi la suite (u_k) est croissante de u_0 jusqu'à u_7 , puis décroissante de u_7 à u_{23} .

Le terme maximum dans le développement est donc $u_7 = C_{23}^7 17^7 38^{16} \approx 1.9 \cdot 10^{39}$.