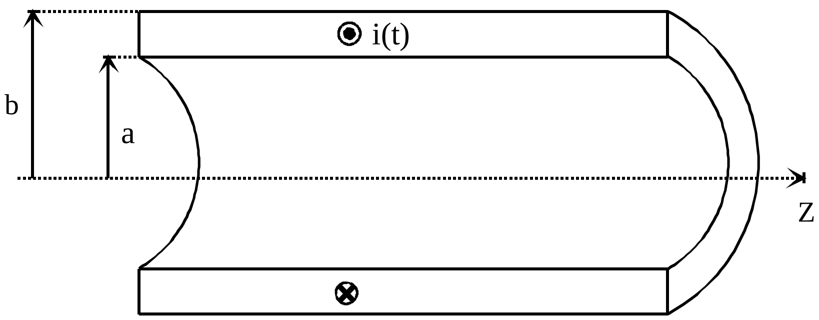
# -EXERCICE 28.1-

## • ENONCE :

« Energie emmagasinée par un solénoïde épais »

On considère un solénoïde illimité de rayon intérieur a et de rayon extérieur b ; entre a et b, on réalise un bobinage de spires jointives comportant au total n spires par unité de longueur (voir figure ci-dessous).




1) Déterminer l'énergie magnétique emmagasinée par unité de longueur de solénoïde, lorsque les spires sont parcourues par un courant i.
2) En déduire l'inductance L par unité de longueur.

**Rq :** les calculs d'inductance ou de mutuelle ne sont pas au programme (si besoin est, elles seront données par l'énoncé). Cependant, les calculs de flux ou d'énergie sont, au contraire, souvent nécessaires pour déterminer la f.e.m induite ; le plus difficile a alors été fait, puisqu'il suffit d'écrire : $L = \dfrac{\varphi}{i}$ ou: $L = \dfrac{2W_M}{i^2}$ ...

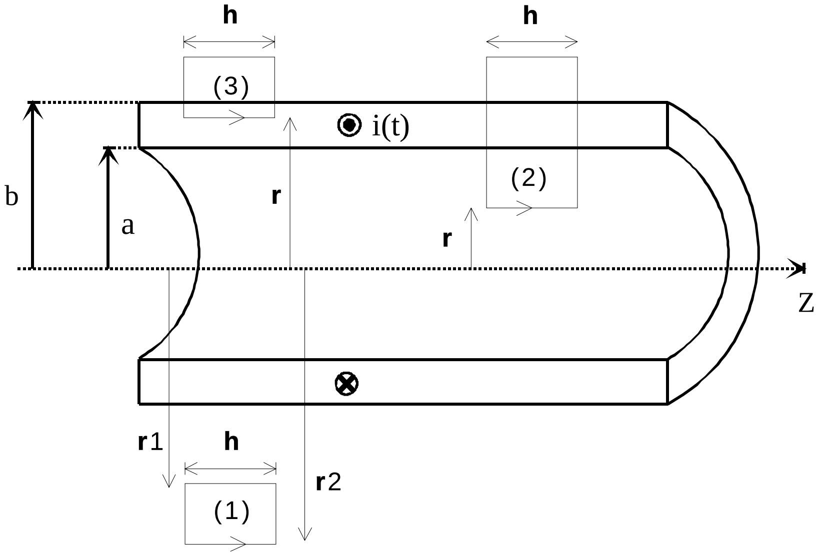
 Christian MAIRE 

• **CORRIGE :**

« Energie emmagasinée par un solénoïde épais »

1) Nous allons nous servir de la formule : $\dfrac{dW_M}{d\tau} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ ; il faut donc connaître le champ magnétique dans tout l'espace.

Les considérations de symétrie et d'invariance « classiques » montrent que le champ est de la forme : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$ (comme pour un solénoïde à « à une seule couche ») ; nous allons donc appliquer le théorème d'Ampère avec des contours **rectangulaires**. Soit la figure suivante :




• Sur le contour (1), qui n'enlace aucun courant, on a :
$B(r_2)h - B(r_1)h = 0,\ \ \forall r_1$ et $r_2 \Rightarrow B(r) = cste$ , à l'extérieur du solénoïde ;avec l'hypothèse du champ nul à l'infini, il vient : $\boxed{\vec{B}_{ext} = \vec{0}}$

**Rq :** sur les segments « verticaux », $\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

• Le contour (2) enlace tout le courant « disponible » sur une longueur h de solénoïde, soit un courant total égal à nih ; on a alors : $B(r)h = \mu_0 nih \Rightarrow$ $\boxed{r \le a:\ \ \vec{B} = \mu_0 ni\vec{e}_z}$

(sur le côté extérieur, la circulation du champ est nulle , puisque ce dernier est nul)

• Le contour (3) enlace des courants sur une surface égale à h(b-r) ; pour une surface « complète » égale à h(b-a), le courant enlacé serait $\mu_0 nih$ : le courant enlacé dans le cas présent vaudra donc $\mu_0 nih \times \dfrac{b-r}{b-a} \Rightarrow B(r)h = \mu_0 nih \times \dfrac{b-r}{b-a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a \le r \le b:\ \ \vec{B}(r) = \mu_0 ni \times \dfrac{b-r}{b-a}\vec{e}_z}$

• L'énergie magnétique emmagasinée est donc donnée par : $W_M = \iiint_{solénoïde} \dfrac{B^2}{2\mu_0} d\tau$ ; on a :

♦ $r \le a:$ le champ est uniforme $\Rightarrow W_M^1 = \dfrac{(\mu_0 ni)^2}{2\mu_0}\pi a^2$ (le volume est $\pi a^2 \times 1$)

♦ $a \leq r \leq b$ : $d\tau$ est un « tube » d'épaisseur dr, de longueur unité ⇒

$W_M^2 = (\frac{\mu_0 ni}{b-a})^2 \times \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b (b-r)^2 2\pi r dr$ , qui ne pose aucun problème d'intégration ; après calculs :

$$\boxed{W_M = W_M^1 + W_M^2 = \frac{\mu_0 \pi n^2 i^2}{12}(3a^2 + b^2 + 2ab)}$$

2) On écrit simplement : $W_M = 1/2 Li^2$ ⇒ $\boxed{L = \frac{\mu_0 \pi n^2}{6}(3a^2 + b^2 + 2ab)}$

**Rq :** on aurait pu également déterminer L en calculant le flux total à travers ce solénoïde, en n'oubliant pas que le champ magnétique n'est pas uniforme sur une section.