Séries numériques

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Séries à termes réels ou complexes

I.1 Définitions de base

Définition *(Sommes partielles d'une série)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit N un entier naturel.

On appelle *somme partielle* d'indice N de la *série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la quantité $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$.

Définition *(Convergence ou divergence d'une série)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que la *série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ (ou la série de terme général u_n) est *convergente* si la suite (S_N) de ses sommes partielles est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est *divergente*.

Définition *(Somme d'une série convergente)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série convergente.

La quantité $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ et est appelée *somme* de la série.

Définition *(Reste d'ordre N d'une série convergente)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$, convergente, de somme S. Soit N un entier naturel.

On appelle *reste d'ordre N* de cette série la quantité notée R_N et égale à $R_N = S - S_N$.

Cette quantité est notée $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Remarques

- Par définition de la convergence d'une série, on a $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$.

  Mais attention : on ne doit pas dire qu'une série est convergente $\Leftrightarrow$ son reste d'indice N tend vers 0, car l'existence même de ce reste suppose *déjà* que la série est convergente.
- Si la suite (u_n) de $\mathbb{K}$ n'est définie que pour $n \geq k$ on peut se ramener à ce qui précède en posant, si $0 \leq n < k$, $u_n = 0$.

  En cas de convergence, la somme de la série est alors notée $\sum\limits_{n=k}^{\infty} u_n$.
- L'unicité de la limite implique l'unicité de la somme d'une série convergente.
- Avec les notations précédentes, on a $u_0 = S_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

  La suite (u_n) est donc à son tour déterminée par la donnée des sommes partielles (S_n).
- Déterminer la *nature* d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

  C'est un problème différent que de calculer sa somme en cas de convergence.

Parfois les deux problèmes peuvent être traités simultanément.

L'énonce pourra demander de prouver la convergence, *puis* de calculer la somme.

Enfin il est fréquent qu'on puisse prouver qu'une série est convergente mais qu'on soit incapable d'en calculer la somme.

– On ne modifie pas la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ en changeant la valeur d'un nombre fini de u_n.
  En revanche, s'il y a convergence, on modifie en général la somme de cette série.

I.2 Premiers exemples

– *Série géométrique* :
  La série $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$, où a appartient à $\mathbb{C}$, converge $\Leftrightarrow |a| < 1$.
  On a alors $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a^n = \dfrac{a^k}{1-a}$ et en particulier $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.
– *Série harmonique* : la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
– *Série harmonique alternée* :
  La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ est convergente, de somme $\ln 2$.
– *Série des* $\dfrac{1}{n(n+1)}$: la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente, de somme 1.
– *Série des* $\dfrac{1}{n^2}$: la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$.
– *Série exponentielle* :
  Pour tout x réel, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et sa somme est e^x.

I.3 Propriétés des séries convergentes

Proposition *(Convergence des séries à termes complexes)*

La série complexe $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ est convergente$\Leftrightarrow$les séries réelles $\sum\limits_{n\geq 0} \operatorname{Re} z_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \operatorname{Im} z_n$ le sont.

On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Proposition *(Une condition nécessaire de convergence)*

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Attention la réciproque est fausse !

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ n'existe pas ou est non nulle, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite *grossièrement divergente*.

Proposition *(Combinaisons linéaires de séries convergentes)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$.
Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente
et on a l'égalité : $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} v_n$.

Remarques

- Si $\lambda \neq 0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda u_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sont de même nature.
- Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de natures différentes, alors $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est divergente.
- Il est possible que $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ soit convergente alors que ni $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ni $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ ne le sont.

  On ne développera donc pas $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} (u_n + v_n)$ sans vérifier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Proposition *(Etude d'une suite ramenée à l'étude d'une série)*

Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ a même nature (CV ou DV) que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.
En cas de convergence, on a : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} u_n) - u_0$.

Remarque

Cette propriété ramène l'étude de la suite (u_n) à celle de la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.

Elle permet aussi d'étudier des séries $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, et souvent d'en calculer la somme, si le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Proposition *(Critère de Cauchy pour la convergence d'une série)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq} : \forall m \geq N, \forall n \geq N, \left| \sum_{k=m}^{k=n} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Ce critère peut encore s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq} : \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

I.4 Convergence absolue

Définition

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.
La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

On a alors l'inégalité : $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Remarque et définition

La réciproque de la propriété précédente est fausse.
Toute série convergente sans être absolument convergente est dite *semi-convergente*.

Proposition *(Produit de deux séries absolument convergentes)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On définit la suite (w_n) de $\mathbb{K}$ par :
$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est le *produit de Cauchy* des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.
Si les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

I.5 Séries alternées

Définition

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$.
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est *alternée* si le signe de $(-1)^n u_n$ est constant.

Proposition *(Critère spécial des séries alternées)*

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série alternée, et si la suite de terme général $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Si on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle d'indice N et $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}$ le reste d'ordre N :
- Les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes, et convergent vers la somme de la série.
- R_N possède le signe de u_{N+1}.
- On a l'inégalité $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.

II Séries à termes positifs

Remarques

– Les hypothèses $u_n \geq 0$ ou $u_n \leq v_n$ ci-dessous, vraies à priori pour tout n de $\mathbb{N}$, peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 : les résultats sur la *nature* des séries (pas sur leur *valeur*) restent valables.
– Compte tenu du fait que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(-u_n)$ sont de même nature, les énoncés suivants s'appliquent aussi, avec des modifications évidentes, au cas des séries réelles dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.
– Les propriétés des séries à termes positifs sont très utiles pour étudier la convergence absolue de séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition *(Convergence par majoration des sommes partielles)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ la suite (S_N) de ses sommes partielles, qui est croissante, est majorée.

En cas de convergence, on a l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{N\geq 0}(S_N)$

Proposition *(Convergence par domination)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
– Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.
– Par conséquent, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

  Dans ce cas, on a alors : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=N}^{\infty} v_n$.

Proposition *(Convergence par équivalence ou par prépondérance)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque

Dans la proposition "$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature", il est essentiel que les termes généraux u_n et v_n gardent un signe constant quand $n \to \infty$.

Exemple : avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + u_n)$.

On a $u_n \sim v_n$ mais $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Proposition *(Sommation des relations de comparaison)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Notons S_N et S'_N les sommes partielles des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

De même notons R_N et R'_N les restes d'ordre N.

En cas de convergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, on a :
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $R_N = \mathrm{o}(R'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $R_N \sim R'_N$.

En cas de divergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, on a :
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $S_N = \mathrm{o}(S'_N)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $S_N \sim S'_N$.

Proposition *(Séries de référence)*

- *Séries de Riemann* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- *Séries de Bertrand* : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$

Proposition *(Utilisation des séries de référence de Riemann)*

- S'il existe $\alpha > 1$ et $M \geq 0$ tels que $0 \leq n^\alpha u_n \leq M$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

  C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, ce qu'on peut traduire par $u_n = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^\alpha})$.
- S'il existe $M > 0$ tel que $nu_n \geq M$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

  C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \lambda > 0$ c'est-à-dire si $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$.

Proposition *(Règles de d'Alembert)*

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.
- Si $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
- Si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire : c'est le cas *douteux* de la règle de d'Alembert.

  Toutefois, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.