III Développements en série de Fourier

III.1 Position du problème

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On sait que la suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers f, mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire $f(t) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(t)$?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de f.

En cas de convergence, et si la somme est bien f, on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que f est *développable en série de Fourier*.

III.2 Les deux théorèmes de convergence

Théorème de Dirichlet

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers la régularisée $\tilde{f}$ de f.
Autrement dit, on a pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point t où l'application f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

Théorème de convergence normale

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
On suppose que f est *continue* et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors les séries $\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)$, $\sum_{n\geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n\geq 0} b_n(f)$ sont absolument convergentes.
Dans ces conditions, la série de Fourier de f est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout $\mathbb{R}$, vers la fonction f.

III.3 Généralisation aux applications T-périodiques

Si on considère des applications T-périodiques, les notations deviennent, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

- **Produit scalaire et norme**

  $$< f, g > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)}\, g(t)\mathrm{d}t, \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

- **Coefficients de Fourier**

  $$c_p(f) = < e_p, f > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \exp(-ip\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

  $$a_n(f) = < 2\cos(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

  $$b_n(f) = < 2\sin(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

- **Série de Fourier**

  La série de Fourier de f s'écrit maintenant :

  $$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ip\omega t} = \frac{1}{2}\, a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.