

### III Développement en série de Fourier

#### III.1 Position du problème

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On sait que la suite  $(S_N(f))$  des polynômes de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers  $f$ , mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire  $f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(t)$  ?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) e^{ipt} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de  $f$ .

En cas de convergence, et si la somme est bien  $f$ , on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que  $f$  est *développable en série de Fourier*.

#### III.2 Les deux théorèmes de convergence

##### Théorème de Dirichlet

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , vers la régularisée  $\tilde{f}$  de  $f$ .

Autrement dit, on a pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point  $t$  où l'application  $f$  est continue, la somme de la série de Fourier de  $f$  est égale à  $f(t)$ .

### Théorème de convergence normale

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On suppose que  $f$  est *continue* et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Alors les séries  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f)$ ,  $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n(f)$  sont absolument convergentes.

Dans ces conditions, la série de Fourier de  $f$  est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout  $\mathbb{R}$ , vers la fonction  $f$ .

## III.3 Généralisation aux applications $T$ -périodiques

Si on considère des applications  $T$ -périodiques, les notations deviennent, avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  :

### – Produit scalaire et norme

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

### – Coefficients de Fourier

$$c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-ip\omega t) dt.$$

$$a_n(f) = \langle 2 \cos(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

$$b_n(f) = \langle 2 \sin(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

### – Série de Fourier

La série de Fourier de  $f$  s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ip\omega t} = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.