

III Développements en série de Fourier

III.1 Position du problème

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On sait que la suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers f , mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire $f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(t)$?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) e^{ipt} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de f .

En cas de convergence, et si la somme est bien f , on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que f est *développable en série de Fourier*.

III.2 Les deux théorèmes de convergence

Théorème de Dirichlet

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Alors la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} , vers la régularisée \tilde{f} de f .

Autrement dit, on a pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point t où l'application f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

Théorème de convergence normale

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On suppose que f est *continue* et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Alors les séries $\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f)$, $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n \geq 0} b_n(f)$ sont absolument convergentes.

Dans ces conditions, la série de Fourier de f est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout \mathbb{R} , vers la fonction f .

III.3 Généralisation aux applications T-périodiques

Si on considère des applications T -périodiques, les notations deviennent, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

– Produit scalaire et norme

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

– Coefficients de Fourier

$$c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-ip\omega t) dt.$$

$$a_n(f) = \langle 2 \cos(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

$$b_n(f) = \langle 2 \sin(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

– Série de Fourier

La série de Fourier de f s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ip\omega t} = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.