

## II Propriétés des coefficients de Fourier

### II.1 Propriétés élémentaires

#### Proposition (Linéarité)

|| Les applications  $f \mapsto c_p(f)$ ,  $f \mapsto a_n(f)$  et  $f \mapsto b_n(f)$  sont des formes linéaires sur  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

#### Remarque

Les suites de terme général  $c_p(f)$ ,  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand  $p \rightarrow \pm\infty$  ou quand  $n \rightarrow \infty$ .

#### Proposition (Cas des fonctions réelles)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ , à valeurs réelles.

|| Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ .
- $a_n(f) = 2\operatorname{Re}(c_n(f))$  est réel.
- $b_n(f) = -2\operatorname{Im}(c_n(f))$  est réel.

#### Proposition (Fonctions paires ou impaires)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

- Si  $f$  est paire :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n(f) = 0$  et  $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$ .

|| On peut alors écrire :  $S_N(f) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt)$ .

- Si  $f$  est impaire :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n(f) = 0$  et  $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$ .

|| On peut alors écrire :  $S_N(f) = \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nt)$ .

### II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

#### Proposition (Inégalité de Bessel)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Pour tout entier naturel  $N$ ,  $\sum_{p=-N}^N |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ .

### Interprétation géométrique

Si  $\tilde{f} = f$  (notamment si  $f$  est continue), cette inégalité s'écrit  $\|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2$  et vient de ce que  $S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{P}_N$ .

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + d(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2.$$

### Conséquence

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Les séries  $\sum_{n \geq 0} |c_n(f)|^2$  et  $\sum_{n \geq 0} |c_{-n}(f)|^2$  sont convergentes.

De même, les séries  $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$  et  $\sum_{n \geq 0} |b_n(f)|^2$  sont convergentes.

On en déduit que  $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} c_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0$ .

### Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

## II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

### Proposition

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . On suppose que  $f$  est continue, et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Ainsi l'application dérivée  $f'$  est élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier relatif  $p$ , on a l'égalité :  $c_p(f') = ip c_p(f)$ .

### Conséquence

Avec ces hypothèses  $c_p(f) = o\left(\frac{1}{p}\right)$  quand  $p \rightarrow \pm\infty$ , et  $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

### Généralisation

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux.

Alors pour tout entier relatif  $p$  :  $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k c_p(f)$ .

On en déduit que quand  $p$  tend vers  $\pm\infty$ , ou quand  $n$  tend vers  $\infty$  :

$$c_p(f) = o\left(\frac{1}{p^k}\right), \quad a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

### Remarque

Ainsi, plus  $f$  est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

## II.4 Égalité de Parseval

### Théorème

Soit  $f$  un élément de  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ , et notamment de  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

La suite  $(S_N(f))$  des polynômes de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.

Autrement dit :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 dt = 0$ .

Sous cette forme, le résultat est encore valable si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

### Proposition (Égalité de Parseval)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

La suite de terme général  $\|S_N(f)\|^2 = \sum_{p=-N}^N |c_p(f)|^2$  converge vers  $\|f\|^2$ .

On en déduit l'égalité de Parseval :  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

### Conséquence

Si deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.

Dit autrement, elles ont la même régularisée.

### Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que  $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$ . Donc  $|c_0(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4}$ .

On vérifie que pour tout  $n \geq 1$  :  $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ .

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  :

$$\frac{1}{2} |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2 \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

### Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez

difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .