II Propriétés des coefficients de Fourier

II.1 Propriétés élémentaires

Proposition *(Linéarité)*

Les applications $f \mapsto c_p(f)$, $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto c_n(f)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Remarque

Les suites de terme général $c_p(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand $p \to \pm\infty$ ou quand $n \to \infty$.

Proposition *(Cas des fonctions réelles)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, à valeurs réelles.

Pour tout entier naturel n, on a :
- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
- $a_n(f) = 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{c_n(f)})$ est réel.
- $b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f))$ est réel.

Proposition *(Fonctions paires ou impaires)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
- Si f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \dfrac{1}{2}\,a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt)$.
- Si f est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt)$.

II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

Proposition *(Inégalité de Bessel)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{p=-N}^{N} |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

Interprétation géométrique

Si $\tilde{f} = f$ (notamment si f est continue), cette inégalité s'écrit $\|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2$ et vient de ce que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_N$.

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \mathrm{d}(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2$.

Conséquence

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |c_n(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes.

De même, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |b_n(f)|^2$ sont convergentes.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{p\to\pm\infty} c_p(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.

Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

Proposition

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. On suppose que f est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Ainsi l'application dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
Dans ces conditions, pour tout entier relatif p, on a l'égalité : $c_p(f') = ip\, c_p(f)$.

Conséquence

Avec ces hypothèses $c_p(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ quand $p \to \pm\infty$, et $a_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Généralisation

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.
Alors pour tout entier relatif p : $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k\, c_p(f)$.
On en déduit que quand p tend vers $\pm\infty$, ou quand n tend vers ∞ :

$c_p(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{p^k}\right)$, $\quad a_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \quad$ et $\quad b_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

Remarque

Ainsi, plus f est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

II.4 Egalité de Parseval

Théorème

Soit f un élément de $\tilde{E}_{2\pi}$, et notamment de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

La suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$.

Sous cette forme, le résultat est encore valable si f appartient à $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Proposition *(Égalité de Parseval)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

La suite de terme général $\|S_N(f)\| = \displaystyle\sum_{p=-N}^{p=N} |c_p(f)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.

On en déduit l'*égalité de Parseval* : $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t$

Conséquence

Si deux fonctions f et g de $\mathcal{E}_{2\pi}$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.

Dit autrement, elles ont la même régularisée.

Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$. Donc $|c_0(f)|^2 = \dfrac{|a_0(f)|^2}{4}$.

On vérifie que pour tout $n \geq 1$: $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$.

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients a_n et b_n :

$$\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2\,\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.