I Coefficients de Fourier

I.1 L'espace vectoriel E[2pi]

Notation

On note $\mathcal{E}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, qui sont continues par morceaux et 2π-périodiques.

Remarques

- Tout f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment, en particulier sur $[-\pi, \pi]$.
- Les éventuelles discontinuités de f sont toutes de *première espèce* : autrement dit, en tout point t, les limites à gauche et à droite $f(t-)$ et $f(t+)$ existent dans $\mathbb{C}$.
- Toute application f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}_{2\pi}$, on pose $< f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

Propriétés

- L'application $(f, g) \mapsto < f, g >$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car $< f, f >= 0$ n'implique pas $f = 0$.

  En fait : $< f, f > = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ en tout point de continuité de f (à l'exception donc d'un nombre fini de points sur chaque segment).
- De par la périodicité : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t$.

  En particulier : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t$.

I.2 L'espace préhilbertien C[2pi]

Définition *(Régularisée d'une application de $\mathcal{E}_{2\pi}$)*

La *régularisée* $\tilde{f}$ d'un élément f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ de f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.

En particulier $\tilde{f}(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f.

Notations

- On notera $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{2\pi}$ des applications qui sont leur propre régularisée.

  Les éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ sont donc les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux et telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.
- On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ donc de $\mathcal{E}_{2\pi}$ formé des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et *continues*.

Remarques

- On ne change pas la valeur de $< f, g >$ si on remplace f ou g par sa régularisée.
- Si f est un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, $< f, f > = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.
  L'application $(f, g) \to < f, g >$ est donc un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ et sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.
- La norme associée est définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}, \|f\| = \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t \right)^{1/2}$.
  On l'appelle la *norme quadratique*. On note encore $\|f\|$ pour un élément quelconque de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

I.3 Polynômes trigonométriques

Définition

Pour tout entier relatif p, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}, e_p(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i \sin(pt)$.

Proposition

La famille $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition

On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie $P = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p \, e_p$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ formé par ces polynômes.

Le *degré* du polynôme $P = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p \, e_p$ est la valeur maximum de $|p|$ pour laquelle $\lambda_p \neq 0$.

Définition

Pour tout entier naturel N, on note $\mathcal{P}_N$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ engendré par les $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$ c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $P = \displaystyle\sum_{p=-N}^{p=N} \lambda_p \, e_p$.

$\mathcal{P}_N$ est donc l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Remarques

- $\mathcal{P}_N$ est de dimension $2N + 1$. La famille $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$ en constitue une base orthonormale.
- On a $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_N \subset \cdots \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \subset \mathcal{E}_{2\pi}$.
  L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est la réunion de tous les $\mathcal{P}_N$.

I.4 Coefficients de Fourier exponentiels

Définition

Soit f dans $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout p de $\mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = < e_p, f > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}\, t$.

$c_p(f)$ est appelé *coefficient de Fourier exponentiel* d'indice p de f.

Définition *(Polynômes de Fourier d'une application)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Pour tout entier naturel N, on pose $S_N(f) = \displaystyle\sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt}$.

Le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est élément de $\mathcal{P}_N$.

On l'appelle le *polynôme de Fourier* de f, d'indice N.

Interprétation géométrique

Si f est *régulière*, c'est-à-dire vérifie $\tilde{f} = f$, et en particulier si f est continue, on peut utiliser la terminologie propre aux espaces préhilbertiens.

$S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

C'est donc l'élément de $\mathcal{P}_N$ qui réalise la meilleure approximation *quadratique* de f, c'est-à-dire qui minimise la quantité $\|f - P\|$, pour tous les P de $\mathcal{P}_N$.

I.5 Coefficients de Fourier trigonométriques

Une nouvelle base de $\mathcal{P}_N$

- Les applications $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont des polynômes trigonométriques.

  Plus précisément : $\cos(nt) = \dfrac{1}{2}(e_n(t) + e_{-n}(t))$, et $\sin(nt) = \dfrac{1}{2i}(e_n(t) - e_{-n}(t))$.

  Inversement : $e_n(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$, et $e_{-n}(t) = \cos(nt) - i\sin(nt)$.

- Pour tout N, $\{1, \cos(t), \ldots, \cos(Nt), \sin(t), \ldots, \sin(Nt)\}$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

  Cette base est orthogonale, mais n'est pas orthonormée.

  En fait : $\|1\| = \|e_0\| = 1$, mais $\forall n \geq 1 : \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Une nouvelle écriture de $S_N(f)$

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, et N un entier naturel.

Le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_N(f) &= \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)e_n(t) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)e_{-n}(t)\\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)(\cos(nt) + i\sin(nt)) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)(\cos(nt) - i\sin(nt))\\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}(c_n(f) + c_{-n}(f))\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} i(c_n(f) - c_{-n}(f))\sin(nt).
\end{aligned}$$

Définition *(Coefficients de Fourier trigonométriques)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel n, on pose :
- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = < \mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\cos(nt), f >$.
- $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i < \mathrm{e}^{int} - \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\sin(nt), f >$.

Autrement dit : $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\mathrm{d}t$.

On constate en particulier que $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier trigonométriques* de f.

Conclusion

Avec ces définitions, le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2}\,a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt).$$

Remarques

- On n'oubliera pas le coefficient $\dfrac{1}{2}$ devant $a_0(f)$. C'est une source d'erreurs mais c'est le prix à payer pour que tous les a_n obéissent à la même définition.
- Si l'application f est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, elle a les mêmes coefficients de Fourier et donc les mêmes polynômes de Fourier que sa régularisée $\tilde{f}$.