



# Séries de Fourier

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Coefficients de Fourier</b>	<b>2</b>
I.1	L'espace vectoriel $E[2\pi]$	2
I.2	L'espace préhilbertien $C[2\pi]$	2
I.3	Polynômes trigonométriques	3
I.4	Coefficients de Fourier exponentiels	3
I.5	Coefficients de Fourier trigonométriques	4
<b>II</b>	<b>Propriétés des coefficients de Fourier</b>	<b>6</b>
II.1	Propriétés élémentaires	6
II.2	Inégalité de Bessel et conséquences	6
II.3	Coefficients de Fourier des applications dérivées	7
II.4	Egalité de Parseval	8
<b>III</b>	<b>Développements en série de Fourier</b>	<b>9</b>
III.1	Position du problème	9
III.2	Les deux théorèmes de convergence	9
III.3	Généralisation aux applications T-périodiques	10

---

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

# I Coefficients de Fourier

## I.1 L'espace vectoriel $\mathcal{E}[2\pi]$

### Notation

On note  $\mathcal{E}_{2\pi}$  l'espace vectoriel des applications  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes, qui sont continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques.

### Remarques

- Tout  $f$  de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment, en particulier sur  $[-\pi, \pi]$ .
- Les éventuelles discontinuités de  $f$  sont toutes de *première espèce* : autrement dit, en tout point  $t$ , les limites à gauche et à droite  $f(t-)$  et  $f(t+)$  existent dans  $\mathbb{C}$ .
- Toute application  $f$  de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

### Définition

Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ , on pose  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$ .

### Propriétés

- L'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car  $\langle f, f \rangle = 0$  n'implique pas  $f = 0$ .

En fait :  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  en tout point de continuité de  $f$  (à l'exception donc d'un nombre fini de points sur chaque segment).

- De par la périodicité :  $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$ .

En particulier :  $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$ .

## I.2 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}[2\pi]$

### Définition (Régularisée d'une application de $\mathcal{E}_{2\pi}$ )

La régularisée  $\tilde{f}$  d'un élément  $f$  de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  de  $f$  est définie par :  $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$ .

En particulier  $\tilde{f}(t) = f(t)$  en tout point de continuité de  $f$ .

### Notations

- On notera  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$  le sous-espace de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  des applications qui sont leur propre régularisée. Les éléments de  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$  sont donc les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques, continues par morceaux et telles que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$ .
- On notera  $\mathcal{C}_{2\pi}$  le sous-espace de  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$  donc de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  formé des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont  $2\pi$ -périodiques et continues.

### Remarques

- On ne change pas la valeur de  $\langle f, g \rangle$  si on remplace  $f$  ou  $g$  par sa régularisée.
- Si  $f$  est un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ ,  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$ .

L'application  $(f, g) \rightarrow \langle f, g \rangle$  est donc un produit scalaire sur  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$  et sur  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

- La norme associée est définie par :  $\forall f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}, \|f\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .

On l'appelle la *norme quadratique*. On note encore  $\|f\|$  pour un élément quelconque de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

## I.3 Polynômes trigonométriques

### Définition

|| Pour tout entier relatif  $p$ , on pose :  $\forall t \in \mathbb{R}, e_p(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i \sin(pt)$ .

### Proposition

|| La famille  $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormale de  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

### Définition

|| On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie  $P = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p e_p$ .

|| On note  $\mathcal{P}$  le sous-espace de  $\mathcal{C}_{2\pi}$  formé par ces polynômes.

|| Le *degré* du polynôme  $P = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda_p e_p$  est la valeur maximum de  $|p|$  pour laquelle  $\lambda_p \neq 0$ .

### Définition

|| Pour tout entier naturel  $N$ , on note  $\mathcal{P}_N$  le sous-espace de  $\mathcal{P}$  engendré par les  $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$

c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires  $P = \sum_{p=-N}^{p=N} \lambda_p e_p$ .

||  $\mathcal{P}_N$  est donc l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré  $\leq N$ .

### Remarques

- $\mathcal{P}_N$  est de dimension  $2N + 1$ . La famille  $(e_p)_{-N \leq p \leq N}$  en constitue une base orthonormale.
- On a  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_N \subset \dots \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \subset \mathcal{E}_{2\pi}$ .

L'espace vectoriel  $\mathcal{P}$  est la réunion de tous les  $\mathcal{P}_N$ .

## I.4 Coefficients de Fourier exponentiels

### Définition

|| Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Pour tout  $p$  de  $\mathbb{Z}$ , on note  $c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt$ .

||  $c_p(f)$  est appelé *coefficient de Fourier exponentiel* d'indice  $p$  de  $f$ .

**Définition** (*Polynômes de Fourier d'une application*)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

Pour tout entier naturel  $N$ , on pose  $S_N(f) = \sum_{p=-N}^N c_p(f)e_p(t) = \sum_{p=-N}^N c_p(f)e^{ipt}$ .

Le polynôme trigonométrique  $S_N(f)$  est élément de  $\mathcal{P}_N$ .

On l'appelle le *polynôme de Fourier* de  $f$ , d'indice  $N$ .

**Interprétation géométrique**

Si  $f$  est *régulière*, c'est-à-dire vérifie  $\tilde{f} = f$ , et en particulier si  $f$  est continue, on peut utiliser la terminologie propre aux espaces préhilbertiens.

$S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $\mathcal{P}_N$  des polynômes trigonométriques de degré  $\leq N$ .

C'est donc l'élément de  $\mathcal{P}_N$  qui réalise la meilleure approximation *quadratique* de  $f$ , c'est-à-dire qui minimise la quantité  $\|f - P\|$ , pour tous les  $P$  de  $\mathcal{P}_N$ .

## I.5 Coefficients de Fourier trigonométriques

**Une nouvelle base de  $\mathcal{P}_N$** 

– Les applications  $t \mapsto \cos(nt)$  et  $t \mapsto \sin(nt)$  sont des polynômes trigonométriques.

Plus précisément :  $\cos(nt) = \frac{1}{2}(e_n(t) + e_{-n}(t))$ , et  $\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e_n(t) - e_{-n}(t))$ .

Inversement :  $e_n(t) = \cos(nt) + i \sin(nt)$ , et  $e_{-n}(t) = \cos(nt) - i \sin(nt)$ .

– Pour tout  $N$ ,  $\{1, \cos(t), \dots, \cos(Nt), \sin(t), \dots, \sin(Nt)\}$  est une base de  $\mathcal{P}_N$ .

Cette base est orthogonale, mais n'est pas orthonormée.

En fait :  $\|1\| = \|e_0\| = 1$ , mais  $\forall n \geq 1 : \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Une nouvelle écriture de  $S_N(f)$** 

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ , et  $N$  un entier naturel.

Le polynôme de Fourier de  $f$  d'indice  $N$  s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{p=-N}^N c_p(f)e_p(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f)e_n(t) + \sum_{n=1}^N c_{-n}(f)e_{-n}(t) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N c_n(f)(\cos(nt) + i \sin(nt)) + \sum_{n=1}^N c_{-n}(f)(\cos(nt) - i \sin(nt)) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nt) + \sum_{n=1}^N i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nt). \end{aligned}$$

**Définition** (Coefficients de Fourier trigonométriques)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$- a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \langle e^{int} + e^{-int}, f \rangle = \langle 2 \cos(nt), f \rangle.$$

$$- b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i \langle e^{int} - e^{-int}, f \rangle = \langle 2 \sin(nt), f \rangle.$$

$$\text{Autrement dit : } a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

On constate en particulier que  $a_0(f) = 2c_0(f)$  et  $b_0(f) = 0$ .

Les  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont appelés *coefficients de Fourier trigonométriques* de  $f$ .

**Conclusion**

Avec ces définitions, le polynôme de Fourier de  $f$  d'indice  $N$  s'écrit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nt).$$

**Remarques**

- On n'oubliera pas le coefficient  $\frac{1}{2}$  devant  $a_0(f)$ . C'est une source d'erreurs mais c'est le prix à payer pour que tous les  $a_n$  obéissent à la même définition.
- Si l'application  $f$  est élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ , elle a les mêmes coefficients de Fourier et donc les mêmes polynômes de Fourier que sa régularisée  $\tilde{f}$ .

## II Propriétés des coefficients de Fourier

### II.1 Propriétés élémentaires

#### Proposition (Linéarité)

|| Les applications  $f \mapsto c_p(f)$ ,  $f \mapsto a_n(f)$  et  $f \mapsto b_n(f)$  sont des formes linéaires sur  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

#### Remarque

Les suites de terme général  $c_p(f)$ ,  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand  $p \rightarrow \pm\infty$  ou quand  $n \rightarrow \infty$ .

#### Proposition (Cas des fonctions réelles)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ , à valeurs réelles.

|| Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ .
- $a_n(f) = 2\operatorname{Re}(c_n(f))$  est réel.
- $b_n(f) = -2\operatorname{Im}(c_n(f))$  est réel.

#### Proposition (Fonctions paires ou impaires)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

- Si  $f$  est paire :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n(f) = 0$  et  $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$ .

|| On peut alors écrire :  $S_N(f) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt)$ .

- Si  $f$  est impaire :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n(f) = 0$  et  $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$ .

|| On peut alors écrire :  $S_N(f) = \sum_{n=1}^N b_n(f) \sin(nt)$ .

### II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

#### Proposition (Inégalité de Bessel)

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Pour tout entier naturel  $N$ ,  $\sum_{p=-N}^N |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ .

### Interprétation géométrique

Si  $\tilde{f} = f$  (notamment si  $f$  est continue), cette inégalité s'écrit  $\|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2$  et vient de ce que  $S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{P}_N$ .

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + d(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2.$$

### Conséquence

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . Les séries  $\sum_{n \geq 0} |c_n(f)|^2$  et  $\sum_{n \geq 0} |c_{-n}(f)|^2$  sont convergentes.

De même, les séries  $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$  et  $\sum_{n \geq 0} |b_n(f)|^2$  sont convergentes.

On en déduit que  $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} c_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0$ .

### Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

## II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

### Proposition

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ . On suppose que  $f$  est continue, et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Ainsi l'application dérivée  $f'$  est élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

Dans ces conditions, pour tout entier relatif  $p$ , on a l'égalité :  $c_p(f') = ip c_p(f)$ .

### Conséquence

Avec ces hypothèses  $c_p(f) = o\left(\frac{1}{p}\right)$  quand  $p \rightarrow \pm\infty$ , et  $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

### Généralisation

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux.

Alors pour tout entier relatif  $p$  :  $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k c_p(f)$ .

On en déduit que quand  $p$  tend vers  $\pm\infty$ , ou quand  $n$  tend vers  $\infty$  :

$$c_p(f) = o\left(\frac{1}{p^k}\right), \quad a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

### Remarque

Ainsi, plus  $f$  est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

## II.4 Égalité de Parseval

### Théorème

Soit  $f$  un élément de  $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ , et notamment de  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

La suite  $(S_N(f))$  des polynômes de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.

Autrement dit :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 dt = 0$ .

Sous cette forme, le résultat est encore valable si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

### Proposition (Égalité de Parseval)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

La suite de terme général  $\|S_N(f)\|^2 = \sum_{p=-N}^N |c_p(f)|^2$  converge vers  $\|f\|^2$ .

On en déduit l'égalité de Parseval :  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

### Conséquence

Si deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{E}_{2\pi}$  ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.

Dit autrement, elles ont la même régularisée.

### Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que  $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$ . Donc  $|c_0(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4}$ .

On vérifie que pour tout  $n \geq 1$  :  $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ .

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  :

$$\frac{1}{2} |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2 \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

### Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez

difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .



### III Développement en série de Fourier

#### III.1 Position du problème

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On sait que la suite  $(S_N(f))$  des polynômes de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers  $f$ , mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire  $f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(t)$  ?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) e^{ipt} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de  $f$ .

En cas de convergence, et si la somme est bien  $f$ , on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que  $f$  est *développable en série de Fourier*.

#### III.2 Les deux théorèmes de convergence

##### Théorème de Dirichlet

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , vers la régularisée  $\tilde{f}$  de  $f$ .

Autrement dit, on a pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ipt} &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point  $t$  où l'application  $f$  est continue, la somme de la série de Fourier de  $f$  est égale à  $f(t)$ .

### Théorème de convergence normale

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_{2\pi}$ .

On suppose que  $f$  est *continue* et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Alors les séries  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f)$ ,  $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n(f)$  sont absolument convergentes.

Dans ces conditions, la série de Fourier de  $f$  est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout  $\mathbb{R}$ , vers la fonction  $f$ .

## III.3 Généralisation aux applications $T$ -périodiques

Si on considère des applications  $T$ -périodiques, les notations deviennent, avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  :

### – Produit scalaire et norme

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

### – Coefficients de Fourier

$$c_p(f) = \langle e_p, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-ip\omega t) dt.$$

$$a_n(f) = \langle 2 \cos(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

$$b_n(f) = \langle 2 \sin(n\omega t), f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

### – Série de Fourier

La série de Fourier de  $f$  s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f) e^{ip\omega t} = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.