Séries de Fourier

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Coefficients de Fourier

I.1 L'espace vectoriel E[2pi]

Notation

On note $\mathcal{E}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, qui sont continues par morceaux et 2π-périodiques.

Remarques

– Tout f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque segment, en particulier sur $[-\pi, \pi]$.

– Les éventuelles discontinuités de f sont toutes de *première espèce* : autrement dit, en tout point t, les limites à gauche et à droite $f(t-)$ et $f(t+)$ existent dans $\mathbb{C}$.

– Toute application f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}_{2\pi}$, on pose $< f, g > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

Propriétés

– L'application $(f, g) \mapsto < f, g >$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car $< f, f > = 0$ n'implique pas $f = 0$.

En fait : $< f, f > = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ en tout point de continuité de f (à l'exception donc d'un nombre fini de points sur chaque segment).

– De par la périodicité : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t$.

En particulier : $\forall f, g \in \mathcal{E}_{2\pi}, < f, g > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}\, t$.

I.2 L'espace préhilbertien C[2pi]

Définition *(Régularisée d'une application de $\mathcal{E}_{2\pi}$)*

La *régularisée* $\tilde{f}$ d'un élément f de $\mathcal{E}_{2\pi}$ de f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.

En particulier $\tilde{f}(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f.

Notations

– On notera $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{2\pi}$ des applications qui sont leur propre régularisée.
Les éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ sont donc les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux et telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$.

– On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ donc de $\mathcal{E}_{2\pi}$ formé des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et *continues*.

Remarques

- On ne change pas la valeur de $< f, g >$ si on remplace f ou g par sa régularisée.
- Si f est un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, $< f, f > = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.
  L'application $(f, g) \to < f, g >$ est donc un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$ et sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.
- La norme associée est définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}, \|f\| = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}$.
  On l'appelle la *norme quadratique*. On note encore $\|f\|$ pour un élément quelconque de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

I.3 Polynômes trigonométriques

Définition

Pour tout entier relatif p, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}, e_p(t) = \exp(ipt) = \cos(pt) + i\sin(pt)$.

Proposition

La famille $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition

On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie $P = \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda_p\, e_p$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ formé par ces polynômes.

Le *degré* du polynôme $P = \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda_p\, e_p$ est la valeur maximum de $|p|$ pour laquelle $\lambda_p \neq 0$.

Définition

Pour tout entier naturel N, on note $\mathcal{P}_N$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ engendré par les $(e_p)_{-N \le p \le N}$

c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $P = \displaystyle\sum_{p=-N}^{p=N} \lambda_p\, e_p$.

$\mathcal{P}_N$ est donc l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré $\le N$.

Remarques

- $\mathcal{P}_N$ est de dimension $2N + 1$. La famille $(e_p)_{-N \le p \le N}$ en constitue une base orthonormale.
- On a $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_N \subset \cdots \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \subset \mathcal{E}_{2\pi}$.
  L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est la réunion de tous les $\mathcal{P}_N$.

I.4 Coefficients de Fourier exponentiels

Définition

Soit f dans $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout p de $\mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = < e_p, f > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}\,t$.

$c_p(f)$ est appelé *coefficient de Fourier exponentiel* d'indice p de f.

Définition *(Polynômes de Fourier d'une application)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Pour tout entier naturel N, on pose $S_N(f) = \displaystyle\sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt}$.

Le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est élément de $\mathcal{P}_N$.

On l'appelle le *polynôme de Fourier* de f, d'indice N.

Interprétation géométrique

Si f est *régulière*, c'est-à-dire vérifie $\tilde{f} = f$, et en particulier si f est continue, on peut utiliser la terminologie propre aux espaces préhilbertiens.

$S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

C'est donc l'élément de $\mathcal{P}_N$ qui réalise la meilleure approximation *quadratique* de f, c'est-à-dire qui minimise la quantité $\|f - P\|$, pour tous les P de $\mathcal{P}_N$.

I.5 Coefficients de Fourier trigonométriques

Une nouvelle base de $\mathcal{P}_N$

- Les applications $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont des polynômes trigonométriques.

  Plus précisément : $\cos(nt) = \dfrac{1}{2}\left(e_n(t) + e_{-n}(t)\right)$, et $\sin(nt) = \dfrac{1}{2i}\left(e_n(t) - e_{-n}(t)\right)$.

  Inversement : $e_n(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$, et $e_{-n}(t) = \cos(nt) - i\sin(nt)$.
- Pour tout N, $\{1, \cos(t), \ldots, \cos(Nt), \sin(t), \ldots, \sin(Nt)\}$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

  Cette base est orthogonale, mais n'est pas orthonormée.

  En fait : $\|1\| = \|e_0\| = 1$, mais $\forall n \geq 1 : \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Une nouvelle écriture de $S_N(f)$

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, et N un entier naturel.

Le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_N(f) &= \sum_{p=-N}^{N} c_p(f)e_p(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)e_n(t) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)e_{-n}(t) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)(\cos(nt) + i\sin(nt)) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)(\cos(nt) - i\sin(nt)) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} (c_n(f) + c_{-n}(f))\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} i(c_n(f) - c_{-n}(f))\sin(nt).
\end{aligned}$$

Définition *(Coefficients de Fourier trigonométriques)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = < \mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\cos(nt), f >$.
- $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i < \mathrm{e}^{int} - \mathrm{e}^{-int}, f > = < 2\sin(nt), f >$.

Autrement dit : $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\mathrm{d}t$.

On constate en particulier que $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier trigonométriques* de f.

Conclusion

Avec ces définitions, le polynôme de Fourier de f d'indice N s'écrit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2}\,a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt).$$

Remarques

- On n'oubliera pas le coefficient $\dfrac{1}{2}$ devant $a_0(f)$. C'est une source d'erreurs mais c'est le prix à payer pour que tous les a_n obéissent à la même définition.
- Si l'application f est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, elle a les mêmes coefficients de Fourier et donc les mêmes polynômes de Fourier que sa régularisée $\tilde{f}$.

II Propriétés des coefficients de Fourier

II.1 Propriétés élémentaires

Proposition *(Linéarité)*

Les applications $f \mapsto c_p(f)$, $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto c_n(f)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Remarque

Les suites de terme général $c_p(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont bornées. En effet :

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat peut cependant être nettement amélioré. On verra en effet que ces trois suites convergent vers 0 quand $p \to \pm\infty$ ou quand $n \to \infty$.

Proposition *(Cas des fonctions réelles)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$, à valeurs réelles.

Pour tout entier naturel n, on a :
- $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
- $a_n(f) = 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{c_n(f)})$ est réel.
- $b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f))$ est réel.

Proposition *(Fonctions paires ou impaires)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
- Si f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \dfrac{1}{2}a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt)$.
- Si f est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

  On peut alors écrire : $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt)$.

II.2 Inégalité de Bessel et conséquences

Proposition *(Inégalité de Bessel)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{p=-N}^{N} |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

Interprétation géométrique

Si $\tilde{f} = f$ (notamment si f est continue), cette inégalité s'écrit $\|S_N(f)\|^2 \le \|f\|^2$ et vient de ce que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_N$.

On a en effet dans ce cas l'égalité :

$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \mathrm{d}(f, \mathcal{P}_N)^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2$.

Conséquence

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. Les séries $\sum_{n \ge 0} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n \ge 0} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes.

De même, les séries $\sum_{n \ge 0} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n \ge 0} |b_n(f)|^2$ sont convergentes.

On en déduit que $\lim\limits_{p \to \pm\infty} c_p(f) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n(f) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n(f) = 0$.

Remarque

On vérifiera toujours que les coefficients de Fourier calculés tendent vers 0...

II.3 Coefficients de Fourier des applications dérivées

Proposition

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$. On suppose que f est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Ainsi l'application dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
Dans ces conditions, pour tout entier relatif p, on a l'égalité : $c_p(f') = ip\, c_p(f)$.

Conséquence

Avec ces hypothèses $c_p(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ quand $p \to \pm\infty$, et $a_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Généralisation

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.
Alors pour tout entier relatif p : $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k\, c_p(f)$.
On en déduit que quand p tend vers $\pm\infty$, ou quand n tend vers ∞ :

$c_p(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{p^k}\right), \quad a_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

Remarque

Ainsi, plus f est dérivable, plus rapidement ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

II.4 Egalité de Parseval

Théorème

Soit f un élément de $\tilde{E}_{2\pi}$, et notamment de $\mathcal{C}_{2\pi}$.
La suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique. On parle de convergence en *moyenne quadratique*.
Autrement dit : $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$.
Sous cette forme, le résultat est encore valable si f appartient à $\mathcal{E}_{2\pi}$.

Proposition *(Égalité de Parseval)*

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
La suite de terme général $\|S_N(f)\| = \displaystyle\sum_{p=-N}^{p=N} |c_p(f)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.
On en déduit l'*égalité de Parseval* : $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t$

Conséquence

Si deux fonctions f et g de $\mathcal{E}_{2\pi}$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en leurs éventuels points de discontinuité.
Dit autrement, elles ont la même régularisée.

Autre forme de l'égalité de Parseval

On se souvient que $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$. Donc $|c_0(f)|^2 = \dfrac{|a_0(f)|^2}{4}$.

On vérifie que pour tout $n \geq 1$: $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$.

On en déduit l'égalité de Parseval exprimée à l'aide des coefficients a_n et b_n :

$$\frac{1}{2}\,|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 2\,\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Remarque

L'égalité de Parseval sert surtout à calculer des sommes de séries qui sans cela seraient assez difficiles à obtenir. On peut ainsi calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

III Développements en série de Fourier

III.1 Position du problème

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On sait que la suite $(S_N(f))$ des polynômes de Fourier de f converge vers f au sens de la norme quadratique, mais on se demande maintenant si cette suite de fonctions converge toujours vers f, mais au sens de la convergence simple ou de la convergence uniforme.

Autrement dit, peut-on écrire $f(t) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(t)$?

Le problème posé équivaut à la convergence des séries de fonctions :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Chacune de ces deux séries de fonctions est appelée *série de Fourier* de f.

En cas de convergence, et si la somme est bien f, on écrira :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \end{aligned}$$

On dit alors que f est *développable en série de Fourier*.

III.2 Les deux théorèmes de convergence

Théorème de Dirichlet

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers la régularisée $\tilde{f}$ de f.
Autrement dit, on a pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ipt} &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \\ &= \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)). \end{aligned}$$

En particulier, en tout point t où l'application f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

Théorème de convergence normale

Soit f un élément de $\mathcal{E}_{2\pi}$.

On suppose que f est *continue* et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors les séries $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(f)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n(f)$ sont absolument convergentes.

Dans ces conditions, la série de Fourier de f est normalement (donc uniformément) convergente, sur tout $\mathbb{R}$, vers la fonction f.

III.3 Généralisation aux applications T-périodiques

Si on considère des applications T-périodiques, les notations deviennent, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

– **Produit scalaire et norme**

$$< f, g > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)}\, g(t)\mathrm{d}t, \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

– **Coefficients de Fourier**

$$c_p(f) = < e_p, f > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\exp(-ip\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n(f) = < 2\cos(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$b_n(f) = < 2\sin(n\omega t), f > = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

– **Série de Fourier**

La série de Fourier de f s'écrit maintenant :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\mathrm{e}^{ip\omega t} = \frac{1}{2}\,a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega t).$$

Tous les résultats de ce chapitre sont encore valables, à ces quelques adaptations près.