II Développements en série entière

II.1 Fonctions développables en série entière

Définition

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dit que f est *développable en série entière* en un point x_0 de Ω s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ et un réel $\rho > 0$ tels que : $|x - x_0| < \rho \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Remarques

- On abrège souvent "développable en série entière" en DSE.
- La définition sous-entend que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ est au moins égal à ρ.
  On peut avoir $R > \rho$. D'ailleurs, si ρ convient, tout réel $\rho' < \rho$ convient encore.
- *Importance des DSE en* 0 :
  Le changement $x = x_0 + h$ ramène le problème en 0. C'est ce qu'on supposera dans la suite.

Trois exemples

- L'application $x \mapsto \exp x$ est DSE en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
  Plus généralement :
  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp(x_0)\exp(x - x_0) = \exp(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$.
  On voit donc que $x \mapsto \exp(x)$ est DSE en tout point de $\mathbb{R}$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}$ est DSE en 0 : $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
  Plus généralement, soit x_0 un élément de $]-1, 1[$.
  Alors, en posant $a_n = \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$:
  $$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{1 - x_0}} = \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{1 - x_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n.$$
  Le rayon de convergence du développement précédent est $|1 - x_0|$.
  On voit donc que f est DSE en tout point de $]-1, 1[$.
- Pour tout x de $]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
  On voit donc que f est DSE en 0, avec un rayon de convergence égal à 1.
  On voit aussi que le domaine de définition de f déborde de $]-1, 1[$.
  En dehors de cet intervalle $f(x)$ existe toujours mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarque *(Fonctions DSE sur un intervalle)*

Si f est DSE en 0, et si le rayon de convergence de ce développement est r, on montre que f est DSE en tout point de $]-r,r[$ (on l'a vu sur les deux premiers exemples).

Cela permet de dire que f est DSE sur l'intervalle $]-r,r[$.

Ainsi $x \mapsto \exp(x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est DSE sur $]-1,1[$.

II.2 Série de MacLaurin

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et f une application de Ω dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, t^n$ est appelée *série de MacLaurin* de f.

Proposition *(Caractère nécessaire de la série de MacLaurin)*

Si f est DSE en 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

La série entière égale à f au voisinage de 0 est nécessairement la série de MacLaurin de f.

Autrement dit, il existe un réel $r>0$ tel que sur $]-r,r[$: $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, t^n$.

Remarque *(Caractère non suffisant de la série de MacLaurin)*

Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine, et même si la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que f est DSE en 0.

Le contre-exemple classique est fourni par l'application $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$.

Proposition *(Une condition suffisante de développement en série entière)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et f une application de Ω dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

On suppose d'autre part qu'il existe $r>0$ et $M \geq 0$ tels que :

$\forall x \in]-r,r[, \forall p \in \mathbb{N}, \left|f^{(p)}(x)\right| \leq M$.

Alors f est DSE en 0, avec un rayon de convergence au moins égal à r.

Remarque

Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

II.3 Opérations sur les applications "DSE"

Proposition *(Somme et produit de deux applications DSE)*

Soient f et g deux applications DSE en 0.

- Pour tous scalaires α et β, l'application $\alpha f + \beta g$ est DSE en 0.
- L'application fg est DSE en 0.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Composition d'applications DSE)*

Soient f et g deux applications DSE en 0. Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ est DSE en 0.

Proposition *(Inverse d'une applications DSE)*

Si f est DSE en 0, et si $f(0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est DSE en 0.

Proposition *(Dérivées et primitives d'une application DSE)*

Soit f une application DSE en 0 :
- Les dérivées successives de f sont également DSE en 0.
  Le développement de $f^{(p)}$ s'obient en dérivant p fois celui de f terme à terme.
- Toute primitive F de f est DSE en 0.
  Le développement de F s'obtient par intégration terme à terme de celui de f.

II.4 Développements usuels

Fonction Exponentielle

- $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$
- $\forall a > 0, \quad a^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n(a)}{n!}\, x^n \quad (R = +\infty)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{x\,z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\, x^n \quad (R = +\infty)$

Fonctions trigonométriques directes

- En prenant la partie réelle de $\exp(ix)$: $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie imaginaire de $\exp(ix)$: $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie paire de $\exp(x)$: $\mathrm{ch}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie impaire de $\exp(x)$: $\mathrm{sh}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Développement de $(1+x)^\alpha$ et cas particuliers

– Ce développement est obtenu en utilisant l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$, qui est vérifiée par l'application $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \quad (R=1).$$

– Avec le cas particulier $\alpha = 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n \quad (R=1).$

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (R=1).$

Logarithme népérien

Le développement de $\ln(1+x)$ peut être obtenu par primitivation :

– $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^n\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} == \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = 1$.

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (R=1).$

Le développement précédent est encore valable si $x = -1$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Les deux développements suivants sont obtenus par primitivation.

– $$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

– $$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}t$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

Fraction rationnelles

– $$\forall a \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\dfrac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} \quad (R=|a|).$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Après $p-1$ dérivations du développement précédent par rapport à x :

$$\forall a \in \mathbb{C}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(a-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^{p-1} \frac{x^n}{a^{n+p}} \quad (R = |a|).$$

– Si f est une fraction rationnelle, n'admettant pas 0 pour pôle, alors f est DSE en 0, le rayon de convergence du développement étant le plus petit module d'un pôle de f.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021