II Développements en série entière

II.1 Fonctions développables en série entière

Définition

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dit que f est *développable en série entière* en un point x_0 de Ω s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, x^n$ et un réel $\rho > 0$ tels que : $|x - x_0| < \rho \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Remarques

– On abrège souvent "développable en série entière" en DSE.
– La définition sous-entend que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, x^n$ est au moins égal à ρ.
On peut avoir $R > \rho$. D'ailleurs, si ρ convient, tout réel $\rho' < \rho$ convient encore.
– *Importance des DSE en* 0 :
Le changement $x = x_0 + h$ ramène le problème en 0. C'est ce qu'on supposera dans la suite.

Trois exemples

– L'application $x \mapsto \exp x$ est DSE en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Plus généralement :
$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp(x_0)\exp(x - x_0) = \exp(x_0) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$.
On voit donc que $x \mapsto \exp(x)$ est DSE en tout point de $\mathbb{R}$.
– L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est DSE en 0 : $\forall x \in]-1, 1[, \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.
Plus généralement, soit x_0 un élément de $]-1, 1[$.
Alors, en posant $a_n = \dfrac{1}{(1 - x_0)^{n+1}}$:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{x - x_0}{1 - x_0}} = \frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x - x_0}{1 - x_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n.$$

Le rayon de convergence du développement précédent est $|1 - x_0|$.
On voit donc que f est DSE en tout point de $]-1, 1[$.
– Pour tout x de $]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
On voit donc que f est DSE en 0, avec un rayon de convergence égal à 1.
On voit aussi que le domaine de définition de f déborde de $]-1, 1[$.
En dehors de cet intervalle $f(x)$ existe toujours mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

Remarque *(Fonctions DSE sur un intervalle)*

Si f est DSE en 0, et si le rayon de convergence de ce développement est r, on montre que f est DSE en tout point de $]-r,r[$ (on l'a vu sur les deux premiers exemples).

Cela permet de dire que f est DSE sur l'intervalle $]-r,r[$.

Ainsi $x \mapsto \exp(x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est DSE sur $]-1,1[$.

II.2 Série de MacLaurin

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et f une application de Ω dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, t^n$ est appelée *série de MacLaurin* de f.

Proposition *(Caractère nécessaire de la série de MacLaurin)*

Si f est DSE en 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

La série entière égale à f au voisinage de 0 est nécessairement la série de MacLaurin de f.

Autrement dit, il existe un réel $r>0$ tel que sur $]-r,r[\, : f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, t^n$.

Remarque *(Caractère non suffisant de la série de MacLaurin)*

Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine, et même si la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que f est DSE en 0.

Le contre-exemple classique est fourni par l'application $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$.

Proposition *(Une condition suffisante de développement en série entière)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et f une application de Ω dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine.

On suppose d'autre part qu'il existe $r>0$ et $M\geq 0$ tels que :

$\forall x \in]-r,r[, \forall p \in \mathbb{N}, \left|f^{(p)}(x)\right| \leq M$.

Alors f est DSE en 0, avec un rayon de convergence au moins égal à r.

Remarque

Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

II.3 Opérations sur les applications "DSE"

Proposition *(Somme et produit de deux applications DSE)*

Soient f et g deux applications DSE en 0.

- Pour tous scalaires α et β, l'application $\alpha f + \beta g$ est DSE en 0.
- L'application fg est DSE en 0.

Proposition *(Composition d'applications DSE)*

Soient f et g deux applications DSE en 0. Si $f(0)=0$, alors $g\circ f$ est DSE en 0.

Proposition *(Inverse d'une applications DSE)*

Si f est DSE en 0, et si $f(0)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est DSE en 0.

Proposition *(Dérivées et primitives d'une application DSE)*

Soit f une application DSE en 0 :
- Les dérivées successives de f sont également DSE en 0.
  Le développement de $f^{(p)}$ s'obient en dérivant p fois celui de f terme à terme.
- Toute primitive F de f est DSE en 0.
  Le développement de F s'obtient par intégration terme à terme de celui de f.

II.4 Développements usuels

Fonction Exponentielle

- $\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (R=+\infty)$
- $\forall a>0,\quad a^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n(a)}{n!}x^n\quad (R=+\infty)$
- $\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{e}^{x\,z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}x^n\quad (R=+\infty)$

Fonctions trigonométriques directes

- En prenant la partie réelle de $\exp(ix)$: $\cos(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad (R=+\infty)$
- En prenant la partie imaginaire de $\exp(ix)$: $\sin(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad (R=+\infty)$
- En prenant la partie paire de $\exp(x)$: $\mathrm{ch}\,(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad (R=+\infty)$
- En prenant la partie impaire de $\exp(x)$: $\mathrm{sh}\,(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad (R=+\infty)$

Développement de $(1+x)^\alpha$ et cas particuliers

– Ce développement est obtenu en utilisant l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$, qui est vérifiée par l'application $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \quad (R=1).$$

– Avec le cas particulier $\alpha = 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n \quad (R=1)$.

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (R=1)$.

Logarithme népérien

Le développement de $\ln(1+x)$ peut être obtenu par primitivation :

– $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, t^n\,\mathrm{d}t$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} == \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = 1$.

– Après le changement $x \mapsto -x$: $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (R=1)$.

Le développement précédent est encore valable si $x = -1$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Les deux développements suivants sont obtenus par primitivation.

– $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$.

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

– $\arcsin(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}t$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si $x = \pm 1$.

Fraction rationnelles

– $\forall a \in \mathbb{C}^*, \quad \dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{a}} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}} \quad (R=|a|)$.

- Après $p-1$ dérivations du développement précédent par rapport à x :

  $$\forall a \in \mathbb{C}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(a-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1} \frac{x^n}{a^{n+p}} \quad (R = |a|).$$

- Si f est une fraction rationnelle, n'admettant pas 0 pour pôle, alors f est DSE en 0, le rayon de convergence du développement étant le plus petit module d'un pôle de f.