



# Séries entières

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Généralités sur les séries entières</b>	<b>2</b>
I.1	Rayon de convergence	2
I.2	Disque ouvert de convergence	3
I.3	Opérations sur les séries entières	4
I.4	Dérivation et intégration d'une série entière	5
<b>II</b>	<b>Développements en série entière</b>	<b>7</b>
II.1	Fonctions développables en série entière	7
II.2	Série de MacLaurin	8
II.3	Opérations sur les applications "DSE"	8
II.4	Développements usuels	9

---

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

# I Généralités sur les séries entières

## I.1 Rayon de convergence

**Définition** (Séries entières réelles ou complexes)

- On appelle *série entière complexe* toute série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  de fonctions définies de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  par  $f_n(z) = a_n z^n$ , où  $(a_n)$  est une suite de  $\mathbb{K}$ .
- On appelle *série entière réelle* toute série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  de fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}$  par  $f_n(t) = a_n t^n$ , où  $(a_n)$  est une suite de  $\mathbb{K}$ .

### Remarque

Dans toute la suite, on considère surtout des séries entières complexes.

Les propriétés des séries entières réelles s'en déduisent, à quelques changements de vocabulaire près, comme remplacer *disque* de convergence par *intervalle* de convergence.

**Définition** (Rayon de convergence)

Soit  $(a_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des réels  $r$  positifs ou nuls pour lesquels la suite  $(a_n r^n)$  est bornée est non vide car il contient 0.

Sa borne supérieure  $R$ , éventuellement infinie, est appelée *rayon de convergence* de la série entière complexe  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , ou de la série entière réelle  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ .

### Premiers exemples

- Le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$  est  $R = 0$ .
- Celui de  $\sum_{n \geq 0} z^n$  est  $R = 1$ . Celui de  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est  $R = +\infty$ .

### Remarques

- On ne change pas le rayon de convergence d'une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  en modifiant la valeur d'un nombre fini de coefficients  $a_n$ .
- Par définition  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$  ou  $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ , ont le même rayon de convergence.
- Soient  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence respectifs de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et de  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ .

On suppose que  $|a_n| \leq |b_n|$ , au moins à partir d'un certain rang. Alors  $R' \leq R$ .

- Pour tout  $\lambda \neq 0$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et de  $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

S'il existe  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ , tels que, pour  $n$  assez grand  $\lambda |a_n| \leq |b_n| \leq \mu |a_n|$ , alors  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  ont le même rayon de convergence. C'est le cas si  $|a_n| \sim |b_n|$ .

## I.2 Disque ouvert de convergence

### Proposition (convergence d'une série entière)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière, et soit  $R$  son rayon de convergence.

– Si  $|z_0| < R$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  est absolument convergente, donc convergente.

Cela implique que la suite  $(a_n z_0^n)$  est convergente vers 0 et donc qu'elle est bornée.

– Si  $|z_0| > R$ , alors la suite  $(a_n z_0^n)$  n'est pas bornée, et donc n'est pas convergente.

La série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  est donc grossièrement divergente.

### Définition (disque ouvert de convergence)

Avec les notations de la définition précédente, et en supposant  $R \neq 0$  :

–  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$  est appelé *disque ouvert de convergence* de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

–  $] -R, R[$  est appelé *intervalle ouvert de convergence* de  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ .

### Remarques

- Une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  est absolument convergente, donc convergente, sur son disque ou intervalle ouvert de convergence. On peut donc parler de la somme  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  (resp.  $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ) sur ce disque (resp. sur cet intervalle) ouvert.
- Une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R = 0$  ne converge qu'en  $z = 0$ .

Cette situation ne présente pas beaucoup d'intérêt.

### Proposition (règle de d'Alembert)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière, et soit  $R$  son rayon de convergence.

On suppose que les coefficients  $a_n$  sont non nuls, au moins à partir d'un certain rang.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , alors  $R = \frac{1}{\lambda}$ .

(avec  $R = +\infty$  si  $\lambda = 0$  et  $R = 0$  si  $\lambda = +\infty$ ).

### Remarques

- Si  $a_n$  est une fraction rationnelle de  $n$ , alors le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  vaut 1.
- Le rayon de convergence  $R$  d'une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  existe toujours.

En revanche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  peut ne pas exister. Il faudra alors utiliser d'autres méthodes que la règle de d'Alembert et par exemple revenir tout simplement à la définition.

- Un cas fréquent est celui des séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  lacunaires, ainsi nommées parce que l'ensemble des indices  $n$  tels que  $a_n = 0$  est infini.

Exemples :  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^{2n}$ ,  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^{2n+1}$ , ou  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^{n!} \dots$

On pourra alors utiliser la forme initiale du critère de d'Alembert :

◊ On considère le terme général  $u_n$  de la série, par exemple  $u_n = \alpha_n z^{n!}$ .

◊ On compare la limite éventuelle du rapport  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  avec 1.

◊ On sait alors pour quelles valeurs de  $|z|$  la série est convergente.

**Proposition** (*Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence*)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Cette série est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence.

Conséquence : la somme  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est continue sur le disque ouvert de convergence.

**Remarque**

Il se peut qu'une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  ne soit pas uniformément convergente (et à fortiori pas normalement convergente) sur son disque ouvert de convergence.

C'est le cas par exemple pour la série entière  $\sum_{n \geq 0} z^n$ .

**Remarques :** (*Comportement sur le bord du disque ouvert de convergence*)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

- Le comportement de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  sur le cercle de centre 0 et de rayon  $R$  peut être quelconque (convergence en tous les points du cercle, ou en certains points, ou en aucun point.)
- Si la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$  est convergente, alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est normalement convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R$ .

La somme  $S(z)$  de cette série est alors continue sur ce disque fermé.

### I.3 Opérations sur les séries entières

**Proposition** (*Somme de deux séries entières*)

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R$  et  $R'$ .

Soit  $\rho$  le rayon de convergence de la série entière somme  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ .

Alors  $\rho \geq \min(R, R')$ , avec égalité si  $R \neq R'$ .

Pour  $|z| < \min(R, R')$ , on a :  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ .

**Proposition** (*Produit de Cauchy de deux séries entières*)

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R$  et  $R'$ .

Soit  $r$  le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  où, pour tout entier  $n$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

(on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  est le *produit de Cauchy* des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ ).

Alors  $r \geq \min(R, R')$ . Pour  $|z| < \min(R, R')$ , on a :  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ .

**Proposition** (*Unicité des coefficients d'une série entière*)

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ , deux séries entières de rayons  $R > 0$  et  $R' > 0$ .

On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0.

Alors ces deux séries sont identiques :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$ .

**Conséquence**

La somme  $S(z)$  de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une fonction paire (resp. impaire)  $\Leftrightarrow$  les  $a_n$  de rang impair (resp. pair) sont nuls.

## I.4 Dérivation et intégration d'une série entière

**Définition** (*Série entière dérivée*)

La série entière  $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1} z^n$  est appelée *série dérivée* de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

**Remarque**

A un changement d'indice près, la série dérivée peut s'écrire :  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ .

**Proposition**

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

**Généralisation**

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

– La série entière  $\sum_{n \geq 0} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$  est appelée série dérivée  $p$ -ième de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Son rayon de convergence est  $R$ .

Cette série peut aussi s'écrire :  $\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$ .

– La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$  obtenue par "intégration terme à terme" de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a le même rayon de convergence  $R$ .

### Remarques

Une série entière et ses séries dérivées, tout en ayant le même rayon de convergence, peuvent avoir des comportements différents sur le bord du disque ouvert de convergence.

### Proposition (Dérivabilité de la somme d'une série entière réelle)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  une série entière réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $S(t)$ .

Alors  $S$  est dérivable sur  $] - R, R[$ , et sur tout cet intervalle :

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}.$$

### Généralisation

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  une série entière réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $S(t)$ .

L'application  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - R, R[$ , et sur tout cet intervalle :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 0, S^{(p)}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n t^{n-p} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n t^{n-p}. \end{aligned}$$

### Remarque

Les énoncés précédents signifient qu'on peut dériver autant de fois que nécessaire, et terme à terme, la somme d'une série entière, sur tout son intervalle ouvert de convergence, sans avoir à invoquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

### Conséquence

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  une série entière réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $S(t)$ .

Pour tout entier  $n$ , le coefficient  $a_n$  est égal à  $\frac{1}{n!} S^{(n)}(0)$ .

### Proposition (Intégrabilité de la somme d'une série entière réelle)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  une série entière réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $S(t)$ .

Une primitive de la fonction  $S$ , sur l'intervalle  $] - R, R[$ , est la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n t^{n+1}$  obtenue par intégration terme à terme.

Sur tout segment  $[\alpha, \beta]$  inclus dans  $] - R, R[$ , on peut donc écrire :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}).$$

## II Développements en série entière

### II.1 Fonctions développables en série entière

#### Définition

Soit  $f$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

On dit que  $f$  est *développable en série entière* en un point  $x_0$  de  $\Omega$  s'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et un réel  $\rho > 0$  tels que :  $|x - x_0| < \rho \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ .

#### Remarques

- On abrège souvent "développable en série entière" en *DSE*.
- La définition sous-entend que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est au moins égal à  $\rho$ .  
On peut avoir  $R > \rho$ . D'ailleurs, si  $\rho$  convient, tout réel  $\rho' < \rho$  convient encore.
- *Importance des DSE en 0* :  
Le changement  $x = x_0 + h$  ramène le problème en 0. C'est ce qu'on supposera dans la suite.

#### Trois exemples

- L'application  $x \mapsto \exp x$  est *DSE* en 0 :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Plus généralement :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp(x_0) \exp(x - x_0) = \exp(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

On voit donc que  $x \mapsto \exp(x)$  est *DSE* en tout point de  $\mathbb{R}$ .

- L'application  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}$  est *DSE* en 0 :  $\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .

Plus généralement, soit  $x_0$  un élément de  $] -1, 1[$ .

Alors, en posant  $a_n = \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$  :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{1 - \frac{x-x_0}{1-x_0}} = \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x-x_0}{1-x_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Le rayon de convergence du développement précédent est  $|1-x_0|$ .

On voit donc que  $f$  est *DSE* en tout point de  $] -1, 1[$ .

- Pour tout  $x$  de  $] -1, 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ .

On voit donc que  $f$  est *DSE* en 0, avec un rayon de convergence égal à 1.

On voit aussi que le domaine de définition de  $f$  déborde de  $] -1, 1[$ .

En dehors de cet intervalle  $f(x)$  existe toujours mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

**Remarque** (*Fonctions DSE sur un intervalle*)

Si  $f$  est DSE en 0, et si le rayon de convergence de ce développement est  $r$ , on montre que  $f$  est DSE en tout point de  $] -r, r[$  (on l'a vu sur les deux premiers exemples).

Cela permet de dire que  $f$  est DSE sur l'intervalle  $] -r, r[$ .

Ainsi  $x \mapsto \exp(x)$  est DSE sur  $\mathbb{R}$ , et  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  est DSE sur  $] -1, 1[$ .

## II.2 Série de MacLaurin

**Définition**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0, et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine.

La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n$  est appelée *série de MacLaurin* de  $f$ .

**Proposition** (*Caractère nécessaire de la série de MacLaurin*)

Si  $f$  est DSE en 0, alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine.

La série entière égale à  $f$  au voisinage de 0 est nécessairement la série de MacLaurin de  $f$ .

Autrement dit, il existe un réel  $r > 0$  tel que sur  $] -r, r[ : f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n$ .

**Remarque** (*Caractère non suffisant de la série de MacLaurin*)

Même si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine, et même si la série de MacLaurin de  $f$  a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que  $f$  est DSE en 0.

Le contre-exemple classique est fourni par l'application  $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ .

**Proposition** (*Une condition suffisante de développement en série entière*)

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0, et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine.

On suppose d'autre part qu'il existe  $r > 0$  et  $M \geq 0$  tels que :

$$\forall x \in ] -r, r[, \forall p \in \mathbb{N}, |f^{(p)}(x)| \leq M.$$

Alors  $f$  est DSE en 0, avec un rayon de convergence au moins égal à  $r$ .

**Remarque**

Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

## II.3 Opérations sur les applications "DSE"

**Proposition** (*Somme et produit de deux applications DSE*)

Soient  $f$  et  $g$  deux applications DSE en 0.

- Pour tous scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ , l'application  $\alpha f + \beta g$  est DSE en 0.
- L'application  $fg$  est DSE en 0.



**Proposition** (Composition d'applications DSE)

|| Soient  $f$  et  $g$  deux applications DSE en 0. Si  $f(0) = 0$ , alors  $g \circ f$  est DSE en 0.

**Proposition** (Inverse d'une applications DSE)

|| Si  $f$  est DSE en 0, et si  $f(0) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{f}$  est DSE en 0.

**Proposition** (Dérivées et primitives d'une application DSE)

|| Soit  $f$  une application DSE en 0 :

- Les dérivées successives de  $f$  sont également DSE en 0.  
Le développement de  $f^{(p)}$  s'obtient en dérivant  $p$  fois celui de  $f$  terme à terme.
- Toute primitive  $F$  de  $f$  est DSE en 0.  
Le développement de  $F$  s'obtient par intégration terme à terme de celui de  $f$ .

## II.4 Développements usuels

### Fonction Exponentielle

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$
- $\forall a > 0, \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n(a)}{n!} x^n \quad (R = +\infty)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} x^n \quad (R = +\infty)$

### Fonctions trigonométriques directes

- En prenant la partie réelle de  $\exp(ix)$  :  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie imaginaire de  $\exp(ix)$  :  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie paire de  $\exp(x)$  :  $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$
- En prenant la partie impaire de  $\exp(x)$  :  $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$

### Développement de $(1+x)^\alpha$ et cas particuliers

– Ce développement est obtenu en utilisant l'équation différentielle  $(1+x)y' = \alpha y$ , qui est vérifiée par l'application  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (R=1).$$

– Avec le cas particulier  $\alpha = 1$  :  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (R=1).$

– Après le changement  $x \mapsto -x$  :  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (R=1).$

### Logarithme népérien

Le développement de  $\ln(1+x)$  peut être obtenu par primitivation :

$$\begin{aligned} - \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (R=1). \end{aligned}$$

Le développement précédent est encore valable si  $x = 1$ .

– Après le changement  $x \mapsto -x$  :  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (R=1).$

Le développement précédent est encore valable si  $x = -1$ .

### Fonctions trigonométriques réciproques

Les deux développements suivants sont obtenus par primitivation.

$$- \arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).$$

Le développement précédent est encore valable si  $x = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} - \arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1). \end{aligned}$$

Le développement précédent est encore valable si  $x = \pm 1$ .

### Fraction rationnelles

$$- \forall a \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} \quad (R=|a|).$$



- Après  $p - 1$  dérivations du développement précédent par rapport à  $x$  :

$$\forall a \in \mathbb{C}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(a-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^{p-1} \frac{x^n}{a^{n+p}} \quad (R = |a|).$$

- Si  $f$  est une fraction rationnelle, n'admettant pas 0 pour pôle, alors  $f$  est *DSE* en 0, le rayon de convergence du développement étant le plus petit module d'un pôle de  $f$ .