V Trigonalisation

Définition

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base (e) de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Remarque

Dire que M est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice M dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Proposition *(CNS de trigonalisabilité)*

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n) est trigonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

En particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

Proposition *(une conséquence de la trigonalisabilité)*

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trigonalisable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Alors les valeurs propres de M^p, pour tout p de $\mathbb{N}$, sont $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_n^p$.

Cet énoncé se généralise aux entiers relatifs p si M est inversible.