

V Trigonalisation

Définition

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.
On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base (e) de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Remarque

Dire que M est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice M dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Proposition (CNS de trigonalisabilité)

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n) est trigonalisable \Leftrightarrow son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{K} .
En particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

Proposition (une conséquence de la trigonalisabilité)

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trigonalisable.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.
Alors les valeurs propres de M^p , pour tout p de \mathbb{N} , sont $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$.
Cet énoncé se généralise aux entiers relatifs p si M est inversible.