IV Diagonalisation : pratique et applications

IV.1 Diagonalisation d'une matrice

Soit à diagonaliser une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On calcule le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M puis les racines dans $\mathbb{K}$ de ce polynôme.
- Si le polynôme χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
- Si au contraire χ_M est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $(M - \lambda I_n)X = 0$, où X est une matrice colonne de $\mathbb{K}^n$.

  L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ.

  La résolution conduit à une base $(e)_\lambda$ de E_λ, donc à $\dim(E_\lambda)$.
- Si, pour l'un des λ, on a $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_M, alors M n'est pas diagonalisable.
- Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(e)_\lambda$ donne une base de $\mathbb{K}^n$, formée de vecteurs propres. On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (e), et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, dans l'ordre des vecteurs propres de la base (e).

Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot :

- On part de la matrice $A_\lambda = M - \lambda I_n$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire B_λ.
- Les valeurs propres de M sont les λ tels que B_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de B_λ.
- Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $B_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $(M - \lambda I_n)X = 0$.

IV.2 Applications de la diagonalisation

- *Calcul des puissances d'une matrice*

  Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$ puis pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

  On peut généraliser aux entiers relatifs k si M est inversible.
- *Systèmes de suites récurrences de pas* 1

  Soient $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$, …, $(w_p)_{p\geq 0}$ des suites de $\mathbb{K}$.

  On pose $X_p = (u_p, v_p, \ldots, w_p)$.

  On suppose qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = MX_p$.

  Dans ces conditions, pour tout $p \geq N$, $X_{p+1} = M^{p-N}X_p$, ce qui nécessite le calcul des puissances successives de M : on est donc ramené au cas précédent...

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– *Etude d'une récurrence linéaire de pas n*

Soit une suite (u_p) définie par une relation de récurrence du type :

$\forall p \geq N, u_{p+n} = \alpha u_{p+n-1} + \beta u_{p+n-2} + \cdots + \gamma u_p$.

Posons $X_p = (u_{p+n}, u_{p+n-1}, \ldots, u_{p+1})$.

On a alors $X_{p+1} = MX_p$, où $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \ldots & \gamma \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = (-1)^n \left[\mathrm{X}^n - \alpha \mathrm{X}^{n-1} - \beta \mathrm{X}^{n-2} - \cdots - \gamma\right]$.

On est donc encore ramené au problème précédent.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021