

II Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

II.1 Définition et premières propriétés

Définition

- || Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- || Le *polynôme caractéristique* de M est $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$.

Propriétés

- Le polynôme caractéristique de M vérifie :
$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) X^{n-1} + \dots + \det(M).$$
- Les matrices M et tM ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition

- || Soit f un endomorphisme de E . On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (e) quelconque de E . On le note $\chi_f(X)$.
- || D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

II.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition

- || Soient f un endomorphisme de E , M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de \mathbb{K} .
- || λ est valeur propre de $M \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_M(X)$.
- || λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est racine de $\chi_f(X)$.

Conséquence

- || Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition (*multiplicité d'une valeur propre*)

- || Soient f un endomorphisme de E , M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élément de \mathbb{K} .
- || On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la *multiplicité* k ($1 \leq k \leq n$), si λ est racine de $\chi_M(X)$ (resp. de $\chi_f(X)$), avec la multiplicité k .
- || Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.
- || On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \dots$

Proposition (*somme et produit des valeurs propres*)

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans \mathbb{C} , c'est-à-dire se décompose en un produit de polynômes de degré 1, alors $\text{tr}(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

C'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Proposition (*valeurs propres d'une matrice réelle*)

Soit M une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels.

On considère ses valeurs propres dans \mathbb{C} .

Si le nombre complexe λ est une valeur propre de M alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M , et avec la même multiplicité.

De plus, si le vecteur colonne X vérifie $MX = \lambda X$, alors on a l'égalité $M\bar{X} = \lambda\bar{X}$.

II.3 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition

Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, les F_k étant non réduits à $\{0\}$.

On suppose que chaque F_k est stable par f , et on note g_k la restriction de f à F_k .

Alors $\chi_f(X) = \chi_{g_1}(X)\chi_{g_2}(X)\cdots\chi_{g_p}(X)$.

Conséquence

Soit f un endomorphisme de E . Soit λ une valeur propre de f .

Si on note $m(\lambda)$ sa multiplicité et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre E_λ , alors on a la double inégalité : $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

En particulier, le sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre simple, c'est-à-dire de multiplicité 1, est nécessairement une droite vectorielle.