I Valeurs et vecteurs propres

I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.
La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F, dit *induit* par f sur F.

Propriétés

– Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
– Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.

Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, notons $F_j = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est :
- Diagonale $\Leftrightarrow$ les droites vectorielles $\mathbb{K}e_j$ sont stables par f.
- Triangulaire supérieure $\Leftrightarrow$ les sous-espaces F_j sont stables par f.

I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

Proposition

On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.
On note (e) une base de E obtenue en *juxtaposant* une base de F puis une base de G.
Soit M la matrice de f dans cette base.
A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$.
– F est stable par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
– De même, F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Généralisation

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, où $F_1, \ldots, F_p$ sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de F_1, …, $(e)_p$ de F_p.

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par $f \Leftrightarrow M$ est formée de p blocs diagonaux M_k ayant successivement les tailles $\dim F_l, \dim F_2, \ldots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si note on g_k la restriction de f à F_k, le k-ème bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k, et $\det f = \det M = \prod_{k=1}^{n} \det g_k = \prod_{k=1}^{n} \det M_k$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition *(polynômes d'endomorphismes)*

Soit f un endomorphisme de E.

Soit $A = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$

On dit que $A(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

Par exemple, si $A = X^p$, alors $A(f) = f^p$. En particulier, si $A = 1$, $A(f) = \mathrm{Id}_E$.

Dans les énoncés ci-dessous, f désigne un endomorphisme quelconque de E.

De même A et B sont deux polynômes quelconques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriétés

- Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors il est stable par $A(f)$.
- $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$; $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$.
- L'application $A \mapsto A(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g commutent, alors $A(f)$ et $B(g)$ commutent. En particulier $A(f)$ et $B(f)$ commutent. $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Im} A(f)$ sont donc stables par $B(f)$ (ou, plus simplement, par f).

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A(f) = 0$, on dit que A est un polynôme *annulateur* de f.

Définition *(polynômes de matrices)*

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$.

Remarque

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

En particulier : $\begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = \mathrm{I}_n. \end{cases}$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A(M)$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e).

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors la matrice de $A(f)$ dans la base (e) est $A(M)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et λ un élément de $\mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe existe au moins un vecteur u **non nul** tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le *spectre* de f, et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque et définition

Avec les notations précédentes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ.

Remarques

- Les vecteurs propres de f, pour la valeur propre λ, sont les éléments non nuls de E_λ.
- Cas particulier : 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non injective.

  Le sous-espace propre est alors $E_0 = \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Soit u un vecteur non nul.

  Dire que u est vecteur propre de f, c'est dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}u$ est stable par f.
- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.
- Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E.

  Si u est vecteur propre de f, c'est pour une seule valeur propre : l'unique λ tel que $f(u) = \lambda u$.

  Mais si λ est une valeur propre de f, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : ce sont tous les vecteurs non nuls de E_λ.

Trois exemples

- L'endomorphisme f de $\mathbb{K}[X]$ défini par $f(P) = XP$ n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $f : P \to XP'$ de $\mathbb{K}[X]$ sont les entiers naturels.

  En effet si le terme de plus haut degré de P est a_nX^n, celui de XP' est na_nX^n.

  L'égalité $f(P) = \lambda P$ n'est donc possible que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

  Réciproquement, $P_n = X^n$ est vecteur propre de f pour la valeur propre n.
- L'endomorphisme f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre.

  Pour tout réel λ, E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.5 Valeurs propres d'une matrice

Définition

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de K.

On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe existe au moins un vecteur colonne U *non nul* tel que $MU = \lambda U$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans $\mathbb{K}$ est appelé le *spectre* de M dans $\mathbb{K}$, et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(M)$.

Remarques

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, ayant pour matrice M dans une base (e) de E.

Les valeurs propres de M sont celles de f.

Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans (e).

u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow U$ est vecteur propre de M pour λ.

Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.

– Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élment de $\mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

– Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si on note $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

Cette inclusion peut être stricte.

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) = \{-i, i\}$

I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Proposition

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_1, E_2, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.

De manière équivalente : si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille de vecteurs propres de f pour p valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Propriétés

- Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si les endomorphismes f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

  Si u est vecteur propre de f pour λ, alors u est est vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$. On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Cas particulier : Si P est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

  Notamment, si f est nilpotente, $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Définition *(automorphismes intérieurs)*

Soit a un automorphisme de E.
L'application $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l' algèbre $\mathcal{L}(E)$.
Les applications φ_a sont appelées *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, $\mathrm{Sp}(\varphi_a(f)) = \mathrm{Sp}(f)$. Plus précisément :
u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_a(f)$ pour λ.
Les sous-espaces propres de $\varphi_a(f)$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de l'application f.
Et puisque a est un automorphisme de E, $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Définition *(matrices semblables)*

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$.

Propriétés

- M et N sont semblables $\Leftrightarrow$ elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E.
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

  Si E est muni d'une base (e), et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e), alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_a(f)$.
- On en déduit en particulier que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$.

  Plus précisément, X est un vecteur colonne propre de $N \Leftrightarrow PX$ est un vecteur colonne propre de M (et pour la même valeur propre).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Si M et N sont semblables, il en est de même également de ${}^{\mathrm{T}}M$ et de ${}^{\mathrm{T}}N$.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}M = Q\,{}^{\mathrm{T}}NQ^{-1}$ avec $Q = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.
– Si M et N sont semblables, et pout tout entier naturel k, M^k et N^k sont semblables.
Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^kP^{-1}$.
Ce résultat s'étend aux entiers k négatifs si M et donc N sont inversibles.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021