I Valeurs et vecteurs propres

I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.

La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F, dit *induit* par f sur F.

Propriétés

– Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

– Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.

Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, notons $F_j = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est :

- Diagonale $\Leftrightarrow$ les droites vectorielles $\mathbb{K}e_j$ sont stables par f.
- Triangulaire supérieure $\Leftrightarrow$ les sous-espaces F_j sont stables par f.

I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

Proposition

On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.

On note (e) une base de E obtenue en *juxtaposant* une base de F puis une base de G.

Soit M la matrice de f dans cette base.

A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$.

– F est stable par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

– De même, F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M$ s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Généralisation

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, où $F_1, \ldots, F_p$ sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de F_1, …, $(e)_p$ de F_p.

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par $f \Leftrightarrow M$ est formée de p blocs diagonaux M_k ayant successivement les tailles $\dim F_l, \dim F_2, \ldots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si note on g_k la restriction de f à F_k, le k-ème bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k, et $\det f = \det M = \prod_{k=1}^{n} \det g_k = \prod_{k=1}^{n} \det M_k$.

I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition *(polynômes d'endomorphismes)*

Soit f un endomorphisme de E.

Soit $A = a_p \mathrm{X}^p + a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$

On dit que $A(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

Par exemple, si $A = \mathrm{X}^p$, alors $A(f) = f^p$. En particulier, si $A = 1$, $A(f) = \mathrm{Id}_E$.

Dans les énoncés ci-dessous, f désigne un endomorphisme quelconque de E.

De même A et B sont deux polynômes quelconques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriétés

- Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors il est stable par $A(f)$.
- $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$; $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$.
- L'application $A \mapsto A(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g commutent, alors $A(f)$ et $B(g)$ commutent. En particulier $A(f)$ et $B(f)$ commutent.
  Ker $A(f)$ et Im $A(f)$ sont donc stables par $B(f)$ (ou, plus simplement, par f).

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A(f) = 0$, on dit que A est un polynôme *annulateur* de f.

Définition *(polynômes de matrices)*

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $A(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k M^k$.

Remarque

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

En particulier : $\begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = \mathrm{I}_n. \end{cases}$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A(M)$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e).

Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base (e).

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors la matrice de $A(f)$ dans la base (e) est $A(M)$.

I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

Définition

Soient f un endomorphisme de E, et λ un élément de $\mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe existe au moins un vecteur u **non nul** tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le *spectre* de f, et noté $\text{Sp}(f)$.

Remarque et définition

Avec les notations précédentes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}\,(f - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

$E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda \text{Id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ.

Remarques

- Les vecteurs propres de f, pour la valeur propre λ, sont les éléments non nuls de E_λ.
- Cas particulier : 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non injective.

  Le sous-espace propre est alors $E_0 = \text{Ker}\,(f)$.
- Soit u un vecteur non nul.

  Dire que u est vecteur propre de f, c'est dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}u$ est stable par f.
- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.
- Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E.

  Si u est vecteur propre de f, c'est pour une seule valeur propre : l'unique λ tel que $f(u) = \lambda u$.

  Mais si λ est une valeur propre de f, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : ce sont tous les vecteurs non nuls de E_λ.

Trois exemples

- L'endomorphisme f de $\mathbb{K}[X]$ défini par $f(P) = XP$ n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $f : P \to XP'$ de $\mathbb{K}[X]$ sont les entiers naturels.

  En effet si le terme de plus haut degré de P est $a_n X^n$, celui de XP' est $na_n X^n$.

  L'égalité $f(P) = \lambda P$ n'est donc possible que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

  Réciproquement, $P_n = X^n$ est vecteur propre de f pour la valeur propre n.
- L'endomorphisme f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre.

  Pour tout réel λ, E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

I.5 Valeurs propres d'une matrice

Définition

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de K.

On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe existe au moins un vecteur colonne U *non nul* tel que $MU = \lambda U$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans $\mathbb{K}$ est appelé le *spectre* de M dans $\mathbb{K}$, et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(M)$.

Remarques

- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, ayant pour matrice M dans une base (e) de E.

  Les valeurs propres de M sont celles de f.

  Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans (e).

  u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow U$ est vecteur propre de M pour λ.

  Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.
- Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un élḿent de $\mathbb{K}$.

  λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  Si on note $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

  Cette inclusion peut être stricte.

  Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(M) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) = \{-i, i\}$

I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Proposition

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_1, E_2, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.

De manière équivalente : si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille de vecteurs propres de f pour p valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

Propriétés

- Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si les endomorphismes f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

  Si u est vecteur propre de f pour λ, alors u est est vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$. On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Cas particulier : Si P est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

  Notamment, si f est nilpotente, $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Définition *(automorphismes intérieurs)*

Soit a un automorphisme de E.
L'application $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l' algèbre $\mathcal{L}(E)$.
Les applications φ_a sont appelées *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, $\mathrm{Sp}(\varphi_a(f)) = \mathrm{Sp}(f)$. Plus précisément :
u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_a(f)$ pour λ.
Les sous-espaces propres de $\varphi_a(f)$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de l'application f.
Et puisque a est un automorphisme de E, $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Définition *(matrices semblables)*

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$.

Propriétés

- M et N sont semblables $\Leftrightarrow$ elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E.
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

  Si E est muni d'une base (e), et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e), alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_a(f)$.
- On en déduit en particulier que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$.

  Plus précisément, X est un vecteur colonne propre de $N \Leftrightarrow PX$ est un vecteur colonne propre de M (et pour la même valeur propre).

– Si M et N sont semblables, il en est de même également de ${}^{\mathrm{T}}M$ et de ${}^{\mathrm{T}}N$.
  Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}M = Q\,{}^{\mathrm{T}}NQ^{-1}$ avec $Q = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.
– Si M et N sont semblables, et pout tout entier naturel k, M^k et N^k sont semblables.
  Cela résulte de $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^kP^{-1}$.
  Ce résultat s'étend aux entiers k négatifs si M et donc N sont inversibles.