

# I Valeurs et vecteurs propres

## I.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### Définition

Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On dit que  $F$  est *stable* par  $f$  si  $f(F) \subset F$ .

La restriction de  $f$  à  $F$  est alors un endomorphisme de  $F$ , dit *induit* par  $f$  sur  $F$ .

### Propriétés

- Si  $f$  et  $g$  commutent dans  $\mathcal{L}(E)$ , alors  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .
- Soit  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$  une base de  $E$ .

Pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , notons  $F_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ .

La matrice de  $f$  dans  $(e)$  est :

- Diagonale  $\Leftrightarrow$  les droites vectorielles  $\mathbb{K}e_j$  sont stables par  $f$ .
- Triangulaire supérieure  $\Leftrightarrow$  les sous-espaces  $F_j$  sont stables par  $f$ .

## I.2 Endomorphismes stabilisant les sev d'une somme directe

### Proposition

On suppose que  $E$  est de dimension finie et que  $E = F \oplus G$ ,  $F$  et  $G$  étant distincts de  $\{0\}$ .

On note  $(e)$  une base de  $E$  obtenue en *juxtaposant* une base de  $F$  puis une base de  $G$ .

Soit  $M$  la matrice de  $f$  dans cette base.

$A$  et  $C$  désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives  $\dim F$  et  $\dim G$ .

- $F$  est stable par  $f \Leftrightarrow M$  s'écrit  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .
- De même,  $F$  et  $G$  sont stables par  $f \Leftrightarrow M$  s'écrit  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .

### Généralisation

On suppose que  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ , où  $F_1, \dots, F_p$  sont tous distincts de  $\{0\}$ .

On munit  $E$  d'une base  $(e)$  *adaptée* à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases  $(e)_1$  de  $F_1, \dots, (e)_p$  de  $F_p$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $M$  dans la base  $(e)$ .

Les sous-espaces vectoriels  $F_k$  sont stables par  $f \Leftrightarrow M$  est formée de  $p$  blocs diagonaux  $M_k$  ayant successivement les tailles  $\dim F_1, \dim F_2, \dots, \dim F_p$ .

Dans ces conditions, si note on  $g_k$  la restriction de  $f$  à  $F_k$ , le  $k$ -ème bloc  $M_k$  de  $M$  est la matrice de  $g_k$  dans la base  $(e)_k$  de  $F_k$ , et  $\det f = \det M = \prod_{k=1}^n \det g_k = \prod_{k=1}^n \det M_k$ .

### I.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

**Définition** (*polynômes d'endomorphismes*)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $A = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On note  $A(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E = \sum_{k=0}^p a_k f^k$

On dit que  $A(f)$  est un polynôme de l'endomorphisme  $f$ .

Par exemple, si  $A = X^p$ , alors  $A(f) = f^p$ . En particulier, si  $A = 1$ ,  $A(f) = \text{Id}_E$ .

Dans les énoncés ci-dessous,  $f$  désigne un endomorphisme quelconque de  $E$ .

De même  $A$  et  $B$  sont deux polynômes quelconques à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Propriétés**

- Si un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $f$ , alors il est stable par  $A(f)$ .
- $\forall \alpha, \beta \in K, (\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$ ;  $(AB)(f) = A(f) \circ B(f)$ .
- L'application  $A \mapsto A(f)$  est un morphisme de l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .
- Si  $f$  et  $g$  commutent, alors  $A(f)$  et  $B(g)$  commutent. En particulier  $A(f)$  et  $B(f)$  commutent.  
 $\text{Ker } A(f)$  et  $\text{Im } A(f)$  sont donc stables par  $B(f)$  (ou, plus simplement, par  $f$ ).

**Définition**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $A$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $A(f) = 0$ , on dit que  $A$  est un polynôme *annulateur* de  $f$ .

**Définition** (*polynômes de matrices*)

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On note  $A(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k$ .

**Remarque**

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes d'endomorphismes.

En particulier : 
$$\begin{cases} (\alpha A + \beta B)(M) = \alpha A(M) + \beta B(M). \\ (AB)(M) = A(M)B(M). \\ 1(M) = I_n. \end{cases}$$

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'application  $A \mapsto A(M)$  est donc un morphisme d'algèbres de  $\mathbb{K}[X]$  vers  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $M$  dans la base  $(e)$ .

Soit  $A$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors la matrice de  $A(f)$  dans la base  $(e)$  est  $A(M)$ .

## I.4 Vecteurs et valeurs propres. Définitions

### Définition

Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $f$  s'il existe au moins un vecteur  $u$  **non nul** tel que  $f(u) = \lambda u$ .

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de  $f$  est appelé le *spectre* de  $f$ , et noté  $\text{Sp}(f)$ .

### Remarque et définition

Avec les notations précédentes,  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $f - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif.

$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$  est appelé *sous-espace propre* de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

### Remarques

- Les vecteurs propres de  $f$ , pour la valeur propre  $\lambda$ , sont les éléments non nuls de  $E_\lambda$ .
- Cas particulier :  $0$  est valeur propre de  $f \Leftrightarrow f$  est non injective.

Le sous-espace propre est alors  $E_0 = \text{Ker}(f)$ .

- Soit  $u$  un vecteur non nul.

Dire que  $u$  est vecteur propre de  $f$ , c'est dire que la droite vectorielle  $\mathbb{K}u$  est stable par  $f$ .

- La restriction de  $f$  à  $E_\lambda$  est l'homothétie  $u \mapsto \lambda u$ .
- Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $u$  un élément de  $E$ .

Si  $u$  est vecteur propre de  $f$ , c'est pour une seule valeur propre : l'unique  $\lambda$  tel que  $f(u) = \lambda u$ .

Mais si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , il existe une infinité de vecteurs propres associés à  $\lambda$  : ce sont tous les vecteurs non nuls de  $E_\lambda$ .

### Trois exemples

- L'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $f(P) = XP$  n'a aucune valeur propre.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme  $f : P \mapsto XP'$  de  $\mathbb{K}[X]$  sont les entiers naturels.

En effet si le terme de plus haut degré de  $P$  est  $a_n X^n$ , celui de  $XP'$  est  $na_n X^n$ .

L'égalité  $f(P) = \lambda P$  n'est donc possible que si  $\lambda \in \mathbb{N}$ .

Réciproquement,  $P_n = X^n$  est vecteur propre de  $f$  pour la valeur propre  $n$ .

- L'endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  défini par  $f(u) = u'$  admet tout réel pour valeur propre. Pour tout réel  $\lambda$ ,  $E_\lambda$  est la droite vectorielle engendrée par  $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$ .

## I.5 Valeurs propres d'une matrice

### Définition

Soient  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  un élément de  $K$ .

On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $M$  s'il existe au moins un vecteur colonne  $U$  non nul tel que  $MU = \lambda U$ .

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de  $M$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de  $M$  dans  $\mathbb{K}$  est appelé le *spectre* de  $M$  dans  $\mathbb{K}$ , et est noté  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ .

### Remarques

- Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , ayant pour matrice  $M$  dans une base  $(e)$  de  $E$ .

Les valeurs propres de  $M$  sont celles de  $f$ .

Soient  $\lambda$  un scalaire,  $u$  un vecteur de  $E$  et  $U$  la matrice colonne de ses coordonnées dans  $(e)$ .

$u$  est vecteur propre de  $f$  pour  $\lambda \Leftrightarrow U$  est vecteur propre de  $M$  pour  $\lambda$ .

Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  de matrice  $M$  dans la base canonique.

- Soient  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$ .

$\lambda$  est une valeur propre de  $M \Leftrightarrow M - \lambda I_n$  est non inversible  $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I_n) = 0$ .

- Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On peut considérer que  $M$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Si on note  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$  le spectre de  $M$  considérée comme matrice réelle, et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  le spectre de  $M$  considérée comme matrice complexe, alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ .

Cette inclusion peut être stricte.

Par exemple, si  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i\}$

## I.6 Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

### Proposition

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  une famille de  $p$  valeurs propres distinctes de  $f$ .

Notons  $E_1, E_2, \dots, E_p$  les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme  $E_1 + E_2 + \dots + E_p$  est directe.

De manière équivalente : si  $u_1, u_2, \dots, u_p$  est une famille de vecteurs propres de  $f$  pour  $p$  valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

### Propriétés

- Si  $\dim(E) = n$ , tout endomorphisme de  $E$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$ . Il en est de même pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Si les endomorphismes  $f$  et  $g$  commutent, tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
- Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $u$  est vecteur propre de  $f$  pour  $\lambda$ , alors  $u$  est vecteur propre de  $P(f)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ . On a un énoncé équivalent pour les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Cas particulier : Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$ , c'est-à-dire si  $P(f) = 0$ , alors les valeurs propres de  $f$  sont des racines de  $P$ .

Notamment, si  $f$  est nilpotente,  $\text{Sp}(f) = \{0\}$ .

## I.7 Automorphismes intérieurs, matrices semblables

### Définition (automorphismes intérieurs)

Soit  $a$  un automorphisme de  $E$ .

L'application  $f \mapsto \varphi_a(f) = a \circ f \circ a^{-1}$  est un automorphisme de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

Les applications  $\varphi_a$  sont appelées *automorphismes intérieurs* de  $\mathcal{L}(E)$ .

### Proposition

Avec les notations précédentes,  $\text{Sp}(\varphi_a(f)) = \text{Sp}(f)$ . Plus précisément :

$u$  est vecteur propre de  $f$  pour  $\lambda \Leftrightarrow a(u)$  est vecteur propre de  $\varphi_a(f)$  pour  $\lambda$ .

Les sous-espaces propres de  $\varphi_a(f)$  sont donc les  $a(E_\lambda)$ , en notant  $E_\lambda$  les sous-espaces propres de l'application  $f$ .

Et puisque  $a$  est un automorphisme de  $E$ ,  $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$ .

### Définition (matrices semblables)

Deux matrices  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $M = PNP^{-1}$ .

### Propriétés

- $M$  et  $N$  sont semblables  $\Leftrightarrow$  elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de  $E$  (avec  $\dim(E) = n$ ), chacune dans une certaine base de  $E$ .
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :

Si  $E$  est muni d'une base  $(e)$ , et si on note  $f, g, a$  les endomorphismes de  $E$  de matrices respectives  $N, M, P$  dans  $(e)$ , alors  $g = a \circ f \circ a^{-1}$ , c'est-à-dire  $g = \varphi_a(f)$ .

- On en déduit en particulier que  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$ .

Plus précisément,  $X$  est un vecteur colonne propre de  $N \Leftrightarrow PX$  est un vecteur colonne propre de  $M$  (et pour la même valeur propre).



- Si  $M$  et  $N$  sont semblables, il en est de même également de  ${}^T M$  et de  ${}^T N$ .  
Cela résulte de  $M = PNP^{-1} \Rightarrow {}^T M = Q {}^T N Q^{-1}$  avec  $Q = {}^T P^{-1}$ .
  - Si  $M$  et  $N$  sont semblables, et pour tout entier naturel  $k$ ,  $M^k$  et  $N^k$  sont semblables.  
Cela résulte de  $M = PNP^{-1} \Rightarrow M^k = PN^k P^{-1}$ .
- Ce résultat s'étend aux entiers  $k$  négatifs si  $M$  et donc  $N$  sont inversibles.