IV Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition *(Continuité sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x, t) \to f(x, t)$ une application continue de $J \times [a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur $[a, b]$, telle que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a, b],\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (*hypothèse de domination*).
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$.
Cette application est continue sur J.

Remarque

Le résultat précédent est encore valable même si l'hypothèse de domination est seulement vérifiée sur tout segment de J.

Proposition *(Dérivation sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x, t) \to f(x, t)$ une application continue de $J \times [a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a, b]$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, continues intégrables telles que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a, b],\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \psi(t)$.
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$.
L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $\forall x \in J,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ (Leibniz).

Remarque

Ce résultat reste valable même si les hypothèses de domination ne sont vérifiées que sur tous les sous-segments de J.

La propriété précédente peut se généraliser au cas d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ (l'hypothèse de domination doit porter alors sur les dérivées partielles successives de f par rapport à x.)

Exemple : la fonction "Gamma"

- La fonction "Gamma" d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- Cette application est de classe est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
- Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en tire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n + 1) = n!$