III Convergences de suites de fonctions intégrables

III.1 Convergence en moyenne ou en moyenne quadratique

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.

L'application $f \mapsto N(f) = \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur cet espace vectoriel.

On l'appelle la *norme de la convergence en moyenne.*

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

On dit que f est *de carré intégrable* sur I si $|f|^2$ est une fonction intégrable sur I.

On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I.

Propriétés

– Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, alors leur produit fg est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

– L'ensemble $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I est un espace vectoriel.

L'application $(f, g) \mapsto < f, g > = \displaystyle\int_I \bar{f} g$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

La norme déduite de ce produit scalaire est définie par $N_2(f) = \left(\displaystyle\int_I |f|^2\right)^{1/2}$.

On l'appelle norme de la *convergence en moyenne quadratique.*

Proposition

Soient f et g deux applications continues et de carré intégrable sur I.

Alors on a les inégalités : $|< f, g >| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\, N_2(g)$ (Cauchy-Schwarz).

Conséquence

Le produit scalaire est une application continue pour N_2. Autrement dit :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = g$ (au sens de la norme N_2), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} < f_n, g_n > = < f, g >$.

III.2 Théorèmes de convergence

Théorème *(Théorème de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
On suppose en outre que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux.
Alors l'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_{n\geq 0}$ est majorée.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Proposition *(Interversion d'une série et d'une intégrale)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, de somme S continue par morceaux.
On suppose en outre que la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n|$ est convergente.
Alors S est intégrable sur I. De plus on a : $N_1(S) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$ et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

On n'omettra cependant pas de vérifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.

Théorème *(Théorème de convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que cette suite est simplement convergente sur I vers une application f continue par morceaux.
On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.
Alors l'application f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

Mais on n'oubliera pas l'*hypothèse de domination* : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable.