II Fonctions intégrables à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Notations préliminaires

Applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On définit les applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ de la manière suivante :
$\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|, (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x)$.

– Si f est continue par morceaux sur I, alors $|f|$, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi.

Applications f^+ et f^-.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On définit les applications f^+ et f^- de la manière suivante :
$\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.
On vérifie alors les égalités $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

– L'application f est continue par morceaux sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur I si l'application $|f|$ est intégrable.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Intégrabilité par domination)*

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ une application intégrable. On suppose que $|f| \leq \varphi$ sur I.
Alors l'application f est intégrable sur I.

Conséquences

Soient f et g deux applications de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, et si $f = \mathrm{O}_b(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de b.
  Alors f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $[a, b[$.

II.3 Utilisation des intégrales de Riemann

Intégrabilité sur $]a, b]$

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
Soit f une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux (le “problème” est en a.)

- Si $(x-a)^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.
- Si $|(x-a) f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de a, alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a) f(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x f(x) = \infty$.

Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soient a un nombre réel, et f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

- Si $x^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$.
- Si $|x f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $x \mapsto \dfrac{\tanh x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = 1$.

Intégrales de Bertrand

Soient α et β deux réels, et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln^\beta x\right|}$.

- f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.
- f est intégrable sur $[2, +\infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

On a défini ce qu'est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, mais on n'a pas encore défini ce qu'on appelle l'intégrale sur I d'une telle fonction.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs réelles)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs complexes)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \text{Re}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f)$ sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I \text{Re}\, f + i\int_I \text{Im}\, f$.

Remarques

– Si $I = \{a\}$, toute application définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...

– Si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, elle est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale coïncide avec la valeur obtenue dans le chapitre "intégration et dérivation".

II.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition *(Linéarité de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
Soient α et β deux scalaires. On sait déjà que $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I.
De plus on a l'égalité : $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_I f + \beta\int_J g$.

Proposition *(Inégalité de la valeur absolue)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition *(Utilisation d'une suite exhaustive de sous-segments)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$.
Soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $I = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} J_n$. Alors $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_{J_n} f$.

Exemple

On définit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est intégrable sur $]0,1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$, et sur $[1,+\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 0$.

On vérifie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{[1/n,n]} f = 0$ (changement de variable $t = \frac{1}{n}$.)

La suite des $J_n = [\frac{1}{n}, n]$ est exhaustive dans $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit le résultat : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} f = 0$.

Proposition *(Utilisation d'une partition de l'intervalle)*

> Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
> Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
> f est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Propriétés diverses

- *Intégrale de la conjuguée d'une application*
  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application intégrable. Soit $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.
  Alors $\bar{f}$ est intégrable sur I et on a l'égalité : $\displaystyle\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.
- *Intégrale sur un sous-intervalle*
  Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$, et J un sous-intervalle de I.
  On note χ_J la *fonction caractéristique* de J, définie par : $\chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$.
  Alors f est intégrable sur J et $\displaystyle\int_J f = \int_I (\chi_J f)$.
- Applications "nulles presque partout"
  Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$.
  On suppose que f est nulle sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  Alors f est intégrable sur I et son intégrale sur cet intervalle est nulle.
- Applications "égales presque partout"
  Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, l'application f étant intégrable.
  Si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I g = \int_I f$.

II.6 Notation définitive de l'intégrale

Notation

> Soit f une application intégrable de $I =]a,b[$ dans $\mathbb{K}$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
> On note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. De même on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_{]a,b[} f$.

Remarques

- Pour tout c où f est définie, on convient que $\displaystyle\int_c^c f = 0$.
- On note fréquemment $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (x ou toute variable "muette") plutôt que $\displaystyle\int_a^b f$.
  Cette notation est bien adaptée aux différentes méthodes de calcul des intégrales (en particulier le calcul par changement de variable.)

Proposition *(relation de Chasles)*

> Si f est intégrable sur $]a, b[$ et si $a < c < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
> Plus généralement, si f est intégrable sur un intervalle I, cette relation reste vraie pour trois points quelconques a, b, c de I (deux d'entre eux pouvant être les extrémités de I).

Proposition *(Calcul d'une intégrale par changement de variable)*

> Soient I et J deux intervalles ouverts, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J sur I.
> Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
> L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ l'application $\varphi' \, f \circ \varphi$ est intégrable sur I.
> Dans ce cas, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \int_J |\varphi'| \, f \circ \varphi$.
> Pour tous éléments a et b de J, on peut alors écrire : $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Soit φ le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ défini par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.

Le changement de variable $x = \varphi(t)$ permet de constater que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

II.7 Extension de la notion d'intégrale

Soit f une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

Soit F l'application définie sur $[a, b[$ par : $\forall x \geq a, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il se peut que f ne soit pas intégrable sur $[a, b[$, mais que F possède une limite finie en b.

Dans ce cas cette limite est encore notée (mais de façon impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple

- On vérifie que l'application $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pourtant on montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
- On notera donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (mais on parle d'intégrale impropre.)