

II Fonctions intégrables à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de \mathbb{R} , et \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

II.1 Notations préliminaires

Applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

- Soit f une application définie sur l'intervalle I , à valeurs dans \mathbb{K} .
On définit les applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ de la manière suivante :
 $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|, (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x)$.
- Si f est continue par morceaux sur I , alors $|f|$, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi.

Applications f^+ et f^- .

- Soit f une application définie sur l'intervalle I , à valeurs réelles.
On définit les applications f^+ et f^- de la manière suivante :
 $\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.
On vérifie alors les égalités $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
- L'application f est continue par morceaux sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition

- || Soit f une application de I dans \mathbb{K} , continue par morceaux.
- || On dit que f est intégrable sur I si l'application $|f|$ est intégrable.

Notation

- || On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

Proposition

- || L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Proposition (*Intégrabilité par domination*)

- || Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue par morceaux.
- || Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application intégrable. On suppose que $|f| \leq \varphi$ sur I .
- || Alors l'application f est intégrable sur I .

Conséquences

Soient f et g deux applications de $I = [a, b[$ dans \mathbb{K} , continues par morceaux.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, et si $f = O_b(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de b . Alors f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $[a, b[$.

II.3 Utilisation des intégrales de Riemann

Intégrabilité sur $]a, b]$

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

Soit f une application de $]a, b]$ dans \mathbb{K} , continue par morceaux (le “problème” est en a .)

- Si $(x - a)^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

C'est le cas en particulier si $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).

Exemple : l'application $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.

- Si $|(x - a)f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de a , alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.

C'est le cas en particulier si $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x) = \lambda \neq 0$.

Exemple : l'application $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \infty$.

Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soient a un nombre réel, et f une application de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} , continue par morceaux.

- Si $x^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

C'est le cas en particulier si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).

Exemple : l'application $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$.

- Si $|xf(x)| \geq M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

C'est le cas en particulier si $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lambda \neq 0$.

Exemple : l'application $x \mapsto \frac{\tanh x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$.

Intégrales de Bertrand

Soient α et β deux réels, et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\ln^\beta x|}$.

- f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.
- f est intégrable sur $[2, +\infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

On a défini ce qu'est une fonction intégrable sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , mais on n'a pas encore défini ce qu'on appelle l'intégrale sur I d'une telle fonction.

Proposition et définition (fonctions à valeurs réelles)

Soit f une application définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} , continue par morceaux.

L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur I .

On pose alors $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Dans ces conditions, on a l'égalité : $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

Proposition et définition (fonctions à valeurs complexes)

Soit f une application définie sur I à valeurs dans \mathbb{C} , continue par morceaux.

L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur I .

On pose alors $\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$.

Remarques

- Si $I = \{a\}$, toute application définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{K} , elle est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale coïncide avec la valeur obtenue dans le chapitre "intégration et dérivation".

II.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux applications intégrables de I dans \mathbb{K} .

Soient α et β deux scalaires. On sait déjà que $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I .

De plus on a l'égalité : $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

Proposition (Inégalité de la valeur absolue)

Soit f une application intégrable de I dans \mathbb{K} . Alors on a l'inégalité : $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

Proposition (Utilisation d'une suite exhaustive de sous-segments)

Soit f une application intégrable de I dans \mathbb{K} .

Soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $I = \bigcup_{n \geq 0} J_n$. Alors $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J_n} f$.

Exemple

On définit $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}^{+*} . L'application f est continue sur \mathbb{R}^{+*} .

Elle est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f(x) = 0$, et sur $[1, +\infty[$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}f(x) = 0$.

On vérifie que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a $\int_{[1/n, n]} f = 0$ (changement de variable $t = \frac{1}{n}$.)

La suite des $J_n = [\frac{1}{n}, n]$ est exhaustive dans \mathbb{R}^{+*} . On en déduit le résultat : $\int_{\mathbb{R}^*} f = 0$.

Proposition (*Utilisation d'une partition de l'intervalle*)

Soit f une application de I dans \mathbb{K} , continue par morceaux.

Soit c un élément de I . Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.

f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d . On a alors : $\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Propriétés diverses

– *Intégrale de la conjuguée d'une application*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application intégrable. Soit $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Alors \bar{f} est intégrable sur I et on a l'égalité : $\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

– *Intégrale sur un sous-intervalle*

Soit f une application intégrable de I dans \mathbb{K} , et J un sous-intervalle de I .

On note χ_J la *fonction caractéristique* de J , définie par : $\chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$

Alors f est intégrable sur J et $\int_J f = \int_I (\chi_J f)$.

– *Applications "nulles presque partout"*

Soit f une application de I dans \mathbb{K} .

On suppose que f est nulle sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors f est intégrable sur I et son intégrale sur cet intervalle est nulle.

– *Applications "égales presque partout"*

Soient f et g deux applications de I dans \mathbb{K} , l'application f étant intégrable.

Si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est intégrable sur I et $\int_I g = \int_I f$.

II.6 Notation définitive de l'intégrale

Notation

Soit f une application intégrable de $I =]a, b[$ dans \mathbb{K} , avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

On note $\int_a^b f = \int_{]a, b[} f$. De même on pose $\int_b^a f = - \int_{]a, b[} f$.

Remarques

– Pour tout c où f est définie, on convient que $\int_c^c f = 0$.

– On note fréquemment $\int_a^b f(x) dx$ (x ou toute variable “muette”) plutôt que $\int_a^b f$.

Cette notation est bien adaptée aux différentes méthodes de calcul des intégrales (en particulier le calcul par changement de variable.)

Proposition (*relation de Chasles*)

Si f est intégrable sur $]a, b[$ et si $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Plus généralement, si f est intégrable sur un intervalle I , cette relation reste vraie pour trois points quelconques a, b, c de I (deux d’entre eux pouvant être les extrémités de I).

Proposition (*Calcul d’une intégrale par changement de variable*)

Soient I et J deux intervalles ouverts, et φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de J sur I .

Soit f une application de I dans \mathbb{K} , continue par morceaux.

L’application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ l’application $\varphi' f \circ \varphi$ est intégrable sur J .

Dans ce cas, on a l’égalité : $\int_I f = \int_J |\varphi'| f \circ \varphi$.

Pour tous éléments a et b de J , on peut alors écrire : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$.

Exemple Soit φ le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}^{+*} défini par $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.

Le changement de variable $x = \varphi(t)$ permet de constater que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$.

II.7 Extension de la notion d’intégrale

Soit f une application de $[a, b[$ dans \mathbb{K} , continue par morceaux.

Soit F l’application définie sur $[a, b[$ par : $\forall x \geq a, F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Il se peut que f ne soit pas intégrable sur $[a, b[$, mais que F possède une limite finie en b .

Dans ce cas cette limite est encore notée (mais de façon impropre) $\int_a^b f(t) dt$.

Exemple

– On vérifie que l’application $f : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ n’est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ .

– Pourtant on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

– On notera donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (mais on parle d’intégrale impropre.)