I Intégrabilité des fonctions positives

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la signification du symbole $\displaystyle\int_I f$ quand l'intervalle I n'est pas un segment ou quand l'application f n'est pas bornée.

Dans ce paragraphe on considère des applications f de I dans $\mathbb{R}^+$.

I.1 Définition de l'intégrabilité

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$. On dit que f est *intégrable* ou encore *sommable* sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout sous-segment J de I, on ait : $\displaystyle\int_J f \leq M$.

On note alors $\displaystyle\int_I f$ la borne supérieure des $\displaystyle\int_J f$, pour tous les sous-segments J de I.

La quantité positive ou nulle $\displaystyle\int_I f$ est appelée *intégrale* de f sur l'intervalle I.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$.

Exemples

- L'application $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $I =]0,1]$ et $\displaystyle\int_{]0,1]} f = 2$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.

Remarques

- Supposons que l'intervalle I soit réduit à un point a.
  Alors toute application f définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Supposons que I soit un segment $[a,b]$ et que f soit continue par morceaux sur I.
  Le chapitre "intégration et dérivation" nous a déjà permis de donner un sens à $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
  L'application f est bien sûr intégrable sur $[a,b]$ au sens de la définition précédente, et la valeur de son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne change pas !

I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Proposition *(Intégrabilité par réunion croissante)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
On suppose qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\geq 0}$ de sous-segments de I tels que :
– L'intervalle I est la réunion des J_n : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J$ (on dit que la suite (J_n) est *exhaustive*.)
– La suite $\displaystyle\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geq 0}$ est majorée : il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\int_{J_n} f \leq M$ pour tout n.
Alors l'application f est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$.

Remarques

– Réciproquement, si f est intégrable sur I, alors on a l'égalité $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K_n} f$ pour toute suite $(K_n)_{n\geq 0}$ (croissante et exhaustive) de sous-segments de I.
– Notons a et b les extrémités gauche et droite de I avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ il existe une suite (a_n) décroissante de limite a, et une suite (b_n) croissante de limite b, telles que la suite $\displaystyle\int_{[a_n,b_n]} f$ converge. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n,b_n]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par partition de l'intervalle)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d.
On a alors l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Conséquence

– Supposons par exemple que l'application f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Dans ce cas on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} f = \int_{]0,1]} f + \int_{[1,+\infty[} f$.
– Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a,b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq +\infty$ (le "problème" est donc en b).
Soit c un élément de $[a,b[$. L'application f est donc continue par morceaux sur $[a,c]$.
Dans ces conditions, f est intégrable sur $[a,b[\Leftrightarrow$ elle l'est sur $[c,b[$.
On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.
– De même, supposons que f soit continue par morceaux sur $]a,b]$ (le "problème" est en a.)
Soit c un élément de $]a,b]$: f est intégrable sur $]a,b] \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]a,c]$.
On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{]a,b]} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par translation de l'intervalle)*

Soit f un élément $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.

Soient α un réel et J l'intervalle se déduisant de I par la translation $x \to x + \alpha$.

Soit g l'application définie sur J par : $\forall x \in J, g(x) = f(x - \alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J, intégrable, et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

Exemples

– L'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$ et $\displaystyle\int_{]1,2]} g = \int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.
  Le changement de variable $x \to x + 1$ a permis ici de se ramener "à l'origine".

Proposition *(Intégrabilité par utilisation d'une primitive)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \le \infty$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en a : $\forall x \in [a, b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors f est intégrable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow F$ (qui est croissante) est majorée.

On a alors : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x\in I} F(x) = \lim_{x\to b} F(x)$.

Remarques

– On a un résultat analogue si f appartient à $\mathcal{C}_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $-\infty \le a < b$.

  En effet, soit $G : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On a $G'(x) = -f(x) \le 0$ sur $I =]a, b]$ et $G(b) = 0$.

  L'application G est donc décroissante sur $I =]a, b]$.

  Alors f est intégrable $\Leftrightarrow G$ est majorée, et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x\in I} G(x) = \lim_{x\to a} G(x)$.

– Une conséquence des deux résultats précédents est que si l'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (donc intégrable sur ce segment) alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, l'intégrale de f restant la même.

Les intégrales de Riemann

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

– Plus généralement, considérons l'application $g :\ x \mapsto \dfrac{1}{x\,|\ln x|^\beta}$.

  L'application g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, ou sur $]2, +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives

Proposition *(Additivité de l'intégrale)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$.

Alors l'application $f+g$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

Proposition *(Produit par un réel positif)*

Soit f un élément de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, et soit λ un réel positif.

Alors l'application λf est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

Proposition *(Positivité de l'intégrale)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

Si de plus f est continue, alors : $\displaystyle\int_I f = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle sur I.

Proposition *(Croissance de l'intégrale)*

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux.

On suppose que pour tout x de I, on a l'inégalité : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition *Comparaison d'une série et d'une intégrale*

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

En particulier, la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.