

I Intégrabilité des fonctions positives

On considère des applications définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

On note $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans \mathbb{K} .

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la signification du symbole $\int_I f$ quand l'intervalle I n'est pas un segment ou quand l'application f n'est pas bornée.

Dans ce paragraphe on considère des applications f de I dans \mathbb{R}^+ .

I.1 Définition de l'intégrabilité

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. On dit que f est *intégrable* ou encore *sommable* sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout sous-segment J de I , on ait : $\int_J f \leq M$.

On note alors $\int_I f$ la borne supérieure des $\int_J f$, pour tous les sous-segments J de I .

La quantité positive ou nulle $\int_I f$ est appelée *intégrale* de f sur l'intervalle I .

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans \mathbb{R}^+ .

Exemples

- L'application $x \mapsto f(x) = e^{-x}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et $\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $I =]0, 1]$ et $\int_{]0,1]} f = 2$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.

Remarques

- Supposons que l'intervalle I soit réduit à un point a .

Alors toute application f définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...

- Supposons que I soit un segment $[a, b]$ et que f soit continue par morceaux sur I .

Le chapitre "intégration et dérivation" nous a déjà permis de donner un sens à $\int_{[a,b]} f$.

L'application f est bien sûr intégrable sur $[a, b]$ au sens de la définition précédente, et la valeur de son intégrale $\int_{[a,b]} f$ ne change pas !

I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Proposition (*Intégrabilité par réunion croissante*)

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.

On suppose qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n \geq 0}$ de sous-segments de I tels que :

– L'intervalle I est la réunion des J_n : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$ (on dit que la suite (J_n) est *exhaustive*.)

– La suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \geq 0}$ est majorée : il existe M dans \mathbb{R}^+ tel que $\int_{J_n} f \leq M$ pour tout n .

Alors l'application f est intégrable sur I et on a : $\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f$.

Remarques

– Réciproquement, si f est intégrable sur I , alors on a l'égalité $\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{K_n} f$ pour toute suite $(K_n)_{n \geq 0}$ (croissante et exhaustive) de sous-segments de I .

– Notons a et b les extrémités gauche et droite de I avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ il existe une suite (a_n) décroissante de limite a , et une suite (b_n) croissante de limite b , telles que la suite $\int_{[a_n, b_n]} f$ converge. On a alors : $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a_n, b_n]} f$.

Proposition (*Intégrabilité par partition de l'intervalle*)

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.

Soit c un élément de I . Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.

L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d .

On a alors l'égalité : $\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Conséquence

– Supposons par exemple que l'application f soit continue par morceaux sur \mathbb{R}^{+*} .

Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Dans ce cas on a : $\int_{\mathbb{R}^{+*}} f = \int_{]0, 1]} f + \int_{[1, +\infty[} f$.

– Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq +\infty$ (le "problème" est donc en b).

Soit c un élément de $[a, b[$. L'application f est donc continue par morceaux sur $[a, c]$.

Dans ces conditions, f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow$ elle l'est sur $[c, b[$.

On a alors l'égalité $\int_{[a, b[} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b[} f$.

– De même, supposons que f soit continue par morceaux sur $]a, b]$ (le "problème" est en a).

Soit c un élément de $]a, b]$: f est intégrable sur $]a, b]$ \Leftrightarrow elle l'est sur $]a, c]$.

On a alors l'égalité $\int_{]a, b]} f = \int_{]a, c]} f + \int_{[c, b]} f$.

Proposition (*Intégrabilité par translation de l'intervalle*)

Soit f un élément $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.

Soient α un réel et J l'intervalle se déduisant de I par la translation $x \rightarrow x + \alpha$.

Soit g l'application définie sur J par : $\forall x \in J, g(x) = f(x - \alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J , intégrable, et $\int_J g = \int_I f$.

Exemples

– L'application $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$ et $\int_{]1, 2]} g = \int_{]0, 1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Le changement de variable $x \rightarrow x + 1$ a permis ici de se ramener "à l'origine".

Proposition (*Intégrabilité par utilisation d'une primitive*)

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq \infty$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en a : $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Alors f est intégrable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow F$ (qui est croissante) est majorée.

On a alors : $\int_I f = \sup_{x \in I} F(x) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Remarques

– On a un résultat analogue si f appartient à $\mathcal{C}_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $-\infty \leq a < b$.

En effet, soit $G : x \rightarrow \int_x^b f(t) dt$. On a $G'(x) = -f(x) \leq 0$ sur $I =]a, b]$ et $G(b) = 0$.

L'application G est donc décroissante sur $I =]a, b]$.

Alors f est intégrable $\Leftrightarrow G$ est majorée, et on a : $\int_I f = \sup_{x \in I} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x)$.

– Une conséquence des deux résultats précédents est que si l'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (donc intégrable sur ce segment) alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[,]a, b]$ et $]a, b]$, l'intégrale de f restant la même.

Les intégrales de Riemann

– L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

– L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

– Plus généralement, considérons l'application $g : x \mapsto \frac{1}{x |\ln x|^\beta}$.

L'application g est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, ou sur $]2, +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives

Proposition (*Additivité de l'intégrale*)

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$.

Alors l'application $f + g$ est intégrable sur I et : $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.

Proposition (*Produit par un réel positif*)

Soit f un élément de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, et soit λ un réel positif.

Alors l'application λf est intégrable sur I et $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

Proposition (*Positivité de l'intégrale*)

Soit f une application intégrable de I dans \mathbb{R}^+ . On sait que $\int_I f \geq 0$.

Si de plus f est continue, alors : $\int_I f = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle sur I .

Proposition (*Croissance de l'intégrale*)

Soit f et g deux applications de I dans \mathbb{R} , continues par morceaux.

On suppose que pour tout x de I , on a l'inégalité : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition (*Comparaison d'une série et d'une intégrale*)

Soit f une application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ est convergente.

En particulier, la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .