I Intégrabilité des fonctions positives

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On note $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la signification du symbole $\displaystyle\int_I f$ quand l'intervalle I n'est pas un segment ou quand l'application f n'est pas bornée.
Dans ce paragraphe on considère des applications f de I dans $\mathbb{R}^+$.

I.1 Définition de l'intégrabilité

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. On dit que f est *intégrable* ou encore *sommable* sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout sous-segment J de I, on ait : $\displaystyle\int_J f \leq M$.
On note alors $\displaystyle\int_I f$ la borne supérieure des $\displaystyle\int_J f$, pour tous les sous-segments J de I.
La quantité positive ou nulle $\displaystyle\int_I f$ est appelée *intégrale* de f sur l'intervalle I.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$.

Exemples

- L'application $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $I =]0, 1]$ et $\displaystyle\int_{]0,1]} f = 2$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.

Remarques

- Supposons que l'intervalle I soit réduit à un point a.
  Alors toute application f définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Supposons que I soit un segment $[a, b]$ et que f soit continue par morceaux sur I.
  Le chapitre "intégration et dérivation" nous a déjà permis de donner un sens à $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
  L'application f est bien sûr intégrable sur $[a, b]$ au sens de la définition précédente, et la valeur de son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne change pas !

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Proposition *(Intégrabilité par réunion croissante)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$.
On suppose qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\geq 0}$ de sous-segments de I tels que :
- L'intervalle I est la réunion des J_n : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J$ (on dit que la suite (J_n) est *exhaustive.*)
- La suite $\displaystyle\Big(\int_{J_n} f\Big)_{n\geq 0}$ est majorée : il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\int_{J_n} f \leq M$ pour tout n.

Alors l'application f est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$.

Remarques

- Réciproquement, si f est intégrable sur I, alors on a l'égalité $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K_n} f$ pour toute suite $(K_n)_{n\geq 0}$ (croissante et exhaustive) de sous-segments de I.
- Notons a et b les extrémités gauche et droite de I avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
  f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ il existe une suite (a_n) décroissante de limite a, et une suite (b_n) croissante de limite b, telles que la suite $\displaystyle\int_{[a_n,b_n]} f$ converge. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n,b_n]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par partition de l'intervalle)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d.
On a alors l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Conséquence

- Supposons par exemple que l'application f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
  Dans ce cas on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} f = \int_{]0,1]} f + \int_{[1,+\infty[} f$.
- Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq +\infty$ (le “problème” est donc en b).
  Soit c un élément de $[a,b[$. L'application f est donc continue par morceaux sur $[a,c]$.
  Dans ces conditions, f est intégrable sur $[a,b[\Leftrightarrow$ elle l'est sur $[c,b[$.
  On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.
- De même, supposons que f soit continue par morceaux sur $]a,b]$ (le “problème” est en a.)
  Soit c un élément de $]a,b]$: f est intégrable sur $]a,b] \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]a,c]$.
  On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{]a,b]} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Intégrabilité par translation de l'intervalle)*

Soit f un élément $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
Soient α un réel et J l'intervalle se déduisant de I par la translation $x \to x + \alpha$.
Soit g l'application définie sur J par : $\forall x \in J, g(x) = f(x - \alpha)$.
Alors g est continue par morceaux sur J, intégrable, et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

Exemples

– L'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$ et $\displaystyle\int_{]1,2]} g = \int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.
Le changement de variable $x \to x + 1$ a permis ici de se ramener "à l'origine".

Proposition *(Intégrabilité par utilisation d'une primitive)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \le \infty$.
Soit F la primitive de f qui s'annule en a : $\forall x \in [a, b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors f est intégrable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow F$ (qui est croissante) est majorée.
On a alors : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x\in I} F(x) = \lim_{x\to b} F(x)$.

Remarques

– On a un résultat analogue si f appartient à $\mathcal{C}_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $-\infty \le a < b$.
En effet, soit $G : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On a $G'(x) = -f(x) \le 0$ sur $I =]a, b]$ et $G(b) = 0$.
L'application G est donc décroissante sur $I =]a, b]$.
Alors f est intégrable $\Leftrightarrow G$ est majorée, et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x\in I} G(x) = \lim_{x\to a} G(x)$.

– Une conséquence des deux résultats précédents est que si l'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (donc intégrable sur ce segment) alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, l'intégrale de f restant la même.

Les intégrales de Riemann

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

– Plus généralement, considérons l'application $g : \ x \mapsto \dfrac{1}{x\,|\ln x|^\beta}$.
L'application g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, ou sur $]2, +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives

Proposition *(Additivité de l'intégrale)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$.

Alors l'application $f+g$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

Proposition *(Produit par un réel positif)*

Soit f un élément de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, et soit λ un réel positif.

Alors l'application λf est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

Proposition *(Positivité de l'intégrale)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

Si de plus f est continue, alors : $\displaystyle\int_I f = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle sur I.

Proposition *(Croissance de l'intégrale)*

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux.

On suppose que pour tout x de I, on a l'inégalité : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition *Comparaison d'une série et d'une intégrale*

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

En particulier, la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021