Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire

I Intégrabilité des fonctions positives

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la signification du symbole $\displaystyle\int_I f$ quand l'intervalle I n'est pas un segment ou quand l'application f n'est pas bornée.

Dans ce paragraphe on considère des applications f de I dans $\mathbb{R}^+$.

I.1 Définition de l'intégrabilité

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. On dit que f est *intégrable* ou encore *sommable* sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout sous-segment J de I, on ait : $\displaystyle\int_J f \leq M$.

On note alors $\displaystyle\int_I f$ la borne supérieure des $\displaystyle\int_J f$, pour tous les sous-segments J de I.

La quantité positive ou nulle $\displaystyle\int_I f$ est appelée *intégrale* de f sur l'intervalle I.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$.

Exemples

- L'application $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $I =]0,1]$ et $\displaystyle\int_{]0,1]} f = 2$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.

Remarques

- Supposons que l'intervalle I soit réduit à un point a.
  Alors toute application f définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Supposons que I soit un segment $[a, b]$ et que f soit continue par morceaux sur I.
  Le chapitre "intégration et dérivation" nous a déjà permis de donner un sens à $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
  L'application f est bien sûr intégrable sur $[a, b]$ au sens de la définition précédente, et la valeur de son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne change pas !

I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Proposition *(Intégrabilité par réunion croissante)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$.
On suppose qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\geq 0}$ de sous-segments de I tels que :
– L'intervalle I est la réunion des J_n : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J$ (on dit que la suite (J_n) est *exhaustive*.)
– La suite $\displaystyle\Big(\int_{J_n} f\Big)_{n\geq 0}$ est majorée : il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\int_{J_n} f \leq M$ pour tout n.
Alors l'application f est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$.

Remarques

– Réciproquement, si f est intégrable sur I, alors on a l'égalité $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K_n} f$ pour toute suite $(K_n)_{n\geq 0}$ (croissante et exhaustive) de sous-segments de I.
– Notons a et b les extrémités gauche et droite de I avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
f est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ il existe une suite (a_n) décroissante de limite a, et une suite (b_n) croissante de limite b, telles que la suite $\displaystyle\int_{[a_n,b_n]} f$ converge. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n,b_n]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par partition de l'intervalle)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
L'application f est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d.
On a alors l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Conséquence

– Supposons par exemple que l'application f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ $\Leftrightarrow$ elle l'est sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Dans ce cas on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} f = \int_{]0,1]} f + \int_{[1,+\infty[} f$.
– Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq +\infty$ (le "problème" est donc en b).
Soit c un élément de $[a,b[$. L'application f est donc continue par morceaux sur $[a,c]$.
Dans ces conditions, f est intégrable sur $[a,b[$ $\Leftrightarrow$ elle l'est sur $[c,b[$.
On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.
– De même, supposons que f soit continue par morceaux sur $]a,b]$ (le "problème" est en a.)
Soit c un élément de $]a,b]$: f est intégrable sur $]a,b]$ $\Leftrightarrow$ elle l'est sur $]a,c]$.
On a alors l'égalité $\displaystyle\int_{]a,b]} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par translation de l'intervalle)*

Soit f un élément $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
Soient α un réel et J l'intervalle se déduisant de I par la translation $x \to x + \alpha$.
Soit g l'application définie sur J par : $\forall x \in J, g(x) = f(x - \alpha)$.
Alors g est continue par morceaux sur J, intégrable, et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

Exemples

– L'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$ et $\displaystyle\int_{]1,2]} g = \int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.
Le changement de variable $x \to x + 1$ a permis ici de se ramener "à l'origine".

Proposition *(Intégrabilité par utilisation d'une primitive)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq \infty$.
Soit F la primitive de f qui s'annule en a : $\forall x \in [a, b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors f est intégrable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow F$ (qui est croissante) est majorée.
On a alors : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x \in I} F(x) = \lim_{x \to b} F(x)$.

Remarques

– On a un résultat analogue si f appartient à $\mathcal{C}_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $-\infty \leq a < b$.
En effet, soit $G : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On a $G'(x) = -f(x) \leq 0$ sur $I =]a, b]$ et $G(b) = 0$.
L'application G est donc décroissante sur $I =]a, b]$.
Alors f est intégrable $\Leftrightarrow G$ est majorée, et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x \in I} G(x) = \lim_{x \to a} G(x)$.
– Une conséquence des deux résultats précédents est que si l'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (donc intégrable sur ce segment) alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, l'intégrale de f restant la même.

Les intégrales de Riemann

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.
– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
– Plus généralement, considérons l'application $g : \ x \mapsto \dfrac{1}{x\,|\ln x|^\beta}$.
L'application g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, ou sur $]2, +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives

Proposition *(Additivité de l'intégrale)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$.

Alors l'application $f+g$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

Proposition *(Produit par un réel positif)*

Soit f un élément de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, et soit λ un réel positif.

Alors l'application λf est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

Proposition *(Positivité de l'intégrale)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

Si de plus f est continue, alors : $\displaystyle\int_I f = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle sur I.

Proposition *(Croissance de l'intégrale)*

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux.

On suppose que pour tout x de I, on a l'inégalité : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition *Comparaison d'une série et d'une intégrale*

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

En particulier, la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

II Fonctions intégrables à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Notations préliminaires

Applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On définit les applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ de la manière suivante :
  $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|, (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x)$.
– Si f est continue par morceaux sur I, alors $|f|$, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi.

Applications f^+ et f^-.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
  On définit les applications f^+ et f^- de la manière suivante :
  $\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.
  On vérifie alors les égalités $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
– L'application f est continue par morceaux sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur I si l'application $|f|$ est intégrable.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Intégrabilité par domination)*

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ une application intégrable. On suppose que $|f| \leq \varphi$ sur I.
Alors l'application f est intégrable sur I.

Conséquences

Soient f et g deux applications de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, et si $f = O_b(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de b.
  Alors f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $[a, b[$.

II.3 Utilisation des intégrales de Riemann

Intégrabilité sur $]a, b]$

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
Soit f une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux (le “problème” est en a.)

- Si $(x - a)^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} (x - a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.
- Si $|(x - a)f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de a, alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} (x - a)f(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \infty$.

Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soient a un nombre réel, et f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

- Si $x^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$.
- Si $|xf(x)| \geq M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $x \mapsto \dfrac{\tanh x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1$.

Intégrales de Bertrand

Soient α et β deux réels, et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln^\beta x\right|}$.

- f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.
- f est intégrable sur $[2, +\infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

On a défini ce qu'est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, mais on n'a pas encore défini ce qu'on appelle l'intégrale sur I d'une telle fonction.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs réelles)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs complexes)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \text{Re}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f)$ sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I \text{Re}\, f + i \int_I \text{Im}\, f$.

Remarques

- Si $I = \{a\}$, toute application définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, elle est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale coïncide avec la valeur obtenue dans le chapitre “intégration et dérivation”.

II.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition *(Linéarité de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
Soient α et β deux scalaires. On sait déjà que $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I.
De plus on a l'égalité : $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_J g$.

Proposition *(Inégalité de la valeur absolue)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition *(Utilisation d'une suite exhaustive de sous-segments)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$.
Soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $\displaystyle I = \bigcup_{n\geq 0} J_n$. Alors $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

Exemple

On définit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est intégrable sur $]0,1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$, et sur $[1,+\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 0$.

On vérifie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{[1/n,n]} f = 0$ (changement de variable $t = \frac{1}{n}$.)

La suite des $J_n = [\frac{1}{n}, n]$ est exhaustive dans $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit le résultat : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} f = 0$.

Proposition *(Utilisation d'une partition de l'intervalle)*

> Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
> Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
> f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Propriétés diverses

- *Intégrale de la conjuguée d'une application*
  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application intégrable. Soit $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.
  Alors $\bar{f}$ est intégrable sur I et on a l'égalité : $\displaystyle\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.
- *Intégrale sur un sous-intervalle*
  Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$, et J un sous-intervalle de I.
  On note χ_J la *fonction caractéristique* de J, définie par : $\chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$.
  Alors f est intégrable sur J et $\displaystyle\int_J f = \int_I (\chi_J f)$.
- Applications "nulles presque partout"
  Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$.
  On suppose que f est nulle sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  Alors f est intégrable sur I et son intégrale sur cet intervalle est nulle.
- Applications "égales presque partout"
  Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, l'application f étant intégrable.
  Si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I g = \int_I f$.

II.6 Notation définitive de l'intégrale

Notation

> Soit f une application intégrable de $I =]a,b[$ dans $\mathbb{K}$, avec $-\infty \le a < b \le \infty$.
> On note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. De même on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_{]a,b[} f$.

Remarques

- Pour tout c où f est définie, on convient que $\displaystyle\int_c^c f = 0$.
- On note fréquemment $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (x ou toute variable "muette") plutôt que $\displaystyle\int_a^b f$.
  Cette notation est bien adaptée aux différentes méthodes de calcul des intégrales (en particulier le calcul par changement de variable.)

Proposition *(relation de Chasles)*

Si f est intégrable sur $]a,b[$ et si $a<c<b$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Plus généralement, si f est intégrable sur un intervalle I, cette relation reste vraie pour trois points quelconques a,b,c de I (deux d'entre eux pouvant être les extrémités de I).

Proposition *(Calcul d'une intégrale par changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles ouverts, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J sur I.
Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ l'application $\varphi'\, f\circ\varphi$ est intégrable sur I.
Dans ce cas, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \int_J |\varphi'|\, f\circ\varphi$.
Pour tous éléments a et b de J, on peut alors écrire : $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Soit φ le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ défini par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.

Le changement de variable $x=\varphi(t)$ permet de constater que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

II.7 Extension de la notion d'intégrale

Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

Soit F l'application définie sur $[a,b[$ par : $\forall x\ge a,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il se peut que f ne soit pas intégrable sur $[a,b[$, mais que F possède une limite finie en b.

Dans ce cas cette limite est encore notée (mais de façon impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple

- On vérifie que l'application $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pourtant on montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
- On notera donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (mais on parle d'intégrale impropre.)

III Convergences de suites de fonctions intégrables

III.1 Convergence en moyenne ou en moyenne quadratique

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.
L'application $f \mapsto N(f) = \int_I |f|$ est une norme sur cet espace vectoriel.
On l'appelle la *norme de la convergence en moyenne.*

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est *de carré intégrable* sur I si $|f|^2$ est une fonction intégrable sur I.
On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I.

Propriétés

- Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, alors leur produit fg est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I est un espace vectoriel.
L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_I \bar{f}g$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
La norme déduite de ce produit scalaire est définie par $N_2(f) = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$.
On l'appelle norme de la *convergence en moyenne quadratique.*

Proposition

Soient f et g deux applications continues et de carré intégrable sur I.
Alors on a les inégalités : $|\langle f, g \rangle| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\, N_2(g)$ (Cauchy-Schwarz).

Conséquence

Le produit scalaire est une application continue pour N_2. Autrement dit :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = g$ (au sens de la norme N_2), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle$.

III.2 Théorèmes de convergence

Théorème *(Théorème de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
On suppose en outre que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux.
Alors l'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_{n\geq 0}$ est majorée.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Proposition *(Interversion d'une série et d'une intégrale)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, de somme S continue par morceaux.
On suppose en outre que la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n|$ est convergente.
Alors S est intégrable sur I. De plus on a : $N_1(S) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$ et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

On n'omettra cependant pas de vérifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.

Théorème *(Théorème de convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que cette suite est simplement convergente sur I vers une application f continue par morceaux.
On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.
Alors l'application f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

Mais on n'oubliera pas l'*hypothèse de domination* : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable.

IV Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition *(Continuité sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur $[a,b]$, telle que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (*hypothèse de domination*).
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Cette application est continue sur J.

Remarque

Le résultat précédent est encore valable même si l'hypothèse de domination est seulement vérifiée sur tout segment de J.

Proposition *(Dérivation sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, continues intégrables telles que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$.
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $\forall x \in J,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ (Leibniz).

Remarque

Ce résultat reste valable même si les hypothèses de domination ne sont vérifiées que sur tous les sous-segments de J.

La propriété précédente peut se généraliser au cas d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ (l'hypothèse de domination doit porter alors sur les dérivées partielles successives de f par rapport à x.)

Exemple : la fonction "Gamma"

- La fonction "Gamma" d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- Cette application est de classe est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en tire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$