Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire

I Intégrabilité des fonctions positives 2
I.1 Définition de l'intégrabilité 2
I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives 3
I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives 5
II Fonctions intégrables à valeurs complexes 6
II.1 Notations préliminaires 6
II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes 6
II.3 Utilisation des intégrales de Riemann 7
II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes 8
II.5 Propriétés de l'intégrale 8
II.6 Notation définitive de l'intégrale 9
II.7 Extension de la notion d'intégrale 10
III Convergences de suites de fonctions intégrables 11
III.1 Convergence en moyenne ou en moyenne quadratique 11
III.2 Théorèmes de convergence 12
IV Intégrales dépendant d'un paramètre 13

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I Intégrabilité des fonctions positives

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la signification du symbole $\displaystyle\int_I f$ quand l'intervalle I n'est pas un segment ou quand l'application f n'est pas bornée.

Dans ce paragraphe on considère des applications f de I dans $\mathbb{R}^+$.

I.1 Définition de l'intégrabilité

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$. On dit que f est *intégrable* ou encore *sommable* sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout sous-segment J de I, on ait : $\displaystyle\int_J f \leq M$.

On note alors $\displaystyle\int_I f$ la borne supérieure des $\displaystyle\int_J f$, pour tous les sous-segments J de I.

La quantité positive ou nulle $\displaystyle\int_I f$ est appelée *intégrale* de f sur l'intervalle I.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$.

Exemples

- L'application $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $I =]0,1]$ et $\displaystyle\int_{]0,1]} f = 2$.
- L'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \pi$.

Remarques

- Supposons que l'intervalle I soit réduit à un point a.
  Alors toute application f définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Supposons que I soit un segment $[a,b]$ et que f soit continue par morceaux sur I.
  Le chapitre "intégration et dérivation" nous a déjà permis de donner un sens à $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
  L'application f est bien sûr intégrable sur $[a,b]$ au sens de la définition précédente, et la valeur de son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne change pas !

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Proposition *(Intégrabilité par réunion croissante)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
On suppose qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\geq 0}$ de sous-segments de I tels que :
– L'intervalle I est la réunion des J_n : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J$ (on dit que la suite (J_n) est *exhaustive*.)
– La suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geq 0}$ est majorée : il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\int_{J_n} f \leq M$ pour tout n.
Alors l'application f est intégrable sur I et on a : $\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$.

Remarques

– Réciproquement, si f est intégrable sur I, alors on a l'égalité $\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K_n} f$ pour toute suite $(K_n)_{n\geq 0}$ (croissante et exhaustive) de sous-segments de I.
– Notons a et b les extrémités gauche et droite de I avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ il existe une suite (a_n) décroissante de limite a, et une suite (b_n) croissante de limite b, telles que la suite $\int_{[a_n,b_n]} f$ converge. On a alors : $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n,b_n]} f$.

Proposition *(Intégrabilité par partition de l'intervalle)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d.
On a alors l'égalité : $\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Conséquence

– Supposons par exemple que l'application f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
Dans ce cas on a : $\int_{\mathbb{R}^{+*}} f = \int_{]0,1]} f + \int_{[1,+\infty[} f$.
– Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq +\infty$ (le "problème" est donc en b).
Soit c un élément de $[a, b[$. L'application f est donc continue par morceaux sur $[a, c]$.
Dans ces conditions, f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow$ elle l'est sur $[c, b[$.
On a alors l'égalité $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.
– De même, supposons que f soit continue par morceaux sur $]a, b]$ (le "problème" est en a.)
Soit c un élément de $]a, b]$: f est intégrable sur $]a, b] \Leftrightarrow$ elle l'est sur $]a, c]$.
On a alors l'égalité $\int_{]a,b]} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Intégrabilité par translation de l'intervalle)*

Soit f un élément $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.
Soient α un réel et J l'intervalle se déduisant de I par la translation $x \to x + \alpha$.
Soit g l'application définie sur J par : $\forall x \in J, g(x) = f(x - \alpha)$.
Alors g est continue par morceaux sur J, intégrable, et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

Exemples

– L'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$ et $\displaystyle\int_{]1,2]} g = \int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.
Le changement de variable $x \to x + 1$ a permis ici de se ramener "à l'origine".

Proposition *(Intégrabilité par utilisation d'une primitive)*

Soit f un élément de $\mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a < b \leq \infty$.
Soit F la primitive de f qui s'annule en a : $\forall x \in [a, b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors f est intégrable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow F$ (qui est croissante) est majorée.
On a alors : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x \in I} F(x) = \lim_{x \to b} F(x)$.

Remarques

– On a un résultat analogue si f appartient à $\mathcal{C}_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$, avec $-\infty \leq a < b$.
En effet, soit $G : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On a $G'(x) = -f(x) \leq 0$ sur $I =]a, b]$ et $G(b) = 0$.
L'application G est donc décroissante sur $I =]a, b]$.
Alors f est intégrable $\Leftrightarrow G$ est majorée, et on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{x \in I} G(x) = \lim_{x \to a} G(x)$.

– Une conséquence des deux résultats précédents est que si l'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (donc intégrable sur ce segment) alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, l'intégrale de f restant la même.

Les intégrales de Riemann

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.

– L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

– Plus généralement, considérons l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{x\,|\ln x|^\beta}$.
L'application g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, ou sur $]2, +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.3 Opérations sur les fonctions intégrables positives

Proposition *(Additivité de l'intégrale)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$.

Alors l'application $f+g$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

Proposition *(Produit par un réel positif)*

Soit f un élément de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, et soit λ un réel positif.

Alors l'application λf est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

Proposition *(Positivité de l'intégrale)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

Si de plus f est continue, alors : $\displaystyle\int_I f = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle sur I.

Proposition *(Croissance de l'intégrale)*

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux.

On suppose que pour tout x de I, on a l'inégalité : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

Proposition *Comparaison d'une série et d'une intégrale*

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

En particulier, la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II Fonctions intégrables à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Notations préliminaires

Applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On définit les applications $|f|$, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ de la manière suivante :
$\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|, (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x)$.
– Si f est continue par morceaux sur I, alors $|f|$, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi.

Applications f^+ et f^-.

– Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On définit les applications f^+ et f^- de la manière suivante :
$\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.
On vérifie alors les égalités $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
– L'application f est continue par morceaux sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

II.2 Intégrabilité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur I si l'application $|f|$ est intégrable.

Notation

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Intégrabilité par domination)*

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ une application intégrable. On suppose que $|f| \leq \varphi$ sur I.
Alors l'application f est intégrable sur I.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Conséquences

Soient f et g deux applications de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, et si $f = O_b(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de b.
  Alors f est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $[a, b[$.

II.3 Utilisation des intégrales de Riemann

Intégrabilité sur $]a, b]$

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

Soit f une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux (le "problème" est en a.)

- Si $(x-a)^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.
- Si $|(x-a)f(x)| \geq M > 0$ au voisinage de a, alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)f(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \infty$.

Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soient a un nombre réel, et f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

- Si $x^\alpha f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).
  Exemple : l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$.
- Si $|xf(x)| \geq M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
  C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = \lambda \neq 0$.
  Exemple : l'application $x \mapsto \dfrac{\tanh x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 1$.

Intégrales de Bertrand

Soient α et β deux réels, et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln^\beta x\right|}$.

- f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.
- f est intégrable sur $[2, +\infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.4 Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

On a défini ce qu'est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, mais on n'a pas encore défini ce qu'on appelle l'intégrale sur I d'une telle fonction.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs réelles)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

Proposition et définition *(fonctions à valeurs complexes)*

Soit f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux.
L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont intégrables sur I.
On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re}\, f + i \int_I \mathrm{Im}\, f$.

Remarques

- Si $I = \{a\}$, toute application définie en a est intégrable sur $I = \{a\}$ et d'intégrale nulle...
- Si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, elle est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale coïncide avec la valeur obtenue dans le chapitre "intégration et dérivation".

II.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition *(Linéarité de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
Soient α et β deux scalaires. On sait déjà que $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I.
De plus on a l'égalité : $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_J g$.

Proposition *(Inégalité de la valeur absolue)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition *(Utilisation d'une suite exhaustive de sous-segments)*

Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$.
Soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $I = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} J_n$. Alors $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Exemple

On définit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est intégrable sur $]0,1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$, et sur $[1,+\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 0$.

On vérifie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{[1/n,n]} f = 0$ (changement de variable $t = \frac{1}{n}$.)

La suite des $J_n = [\frac{1}{n}, n]$ est exhaustive dans $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit le résultat : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} f = 0$.

Proposition *(Utilisation d'une partition de l'intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
Soit c un élément de I. Notons $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$.
f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ elle l'est sur I_g et sur I_d. On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.

Propriétés diverses

– *Intégrale de la conjuguée d'une application*
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application intégrable. Soit $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.
Alors $\bar{f}$ est intégrable sur I et on a l'égalité : $\displaystyle\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

– *Intégrale sur un sous-intervalle*
Soit f une application intégrable de I dans $\mathbb{K}$, et J un sous-intervalle de I.
On note χ_J la *fonction caractéristique* de J, définie par : $\chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$.
Alors f est intégrable sur J et $\displaystyle\int_J f = \int_I (\chi_J f)$.

– Applications "nulles presque partout"
Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f est nulle sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Alors f est intégrable sur I et son intégrale sur cet intervalle est nulle.

– Applications "égales presque partout"
Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, l'application f étant intégrable.
Si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I g = \int_I f$.

II.6 Notation définitive de l'intégrale

Notation

Soit f une application intégrable de $I =]a,b[$ dans $\mathbb{K}$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
On note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. De même on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_{]a,b[} f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– Pour tout c où f est définie, on convient que $\int_c^c f = 0$.

– On note fréquemment $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (x ou toute variable "muette") plutôt que $\int_a^b f$.

Cette notation est bien adaptée aux différentes méthodes de calcul des intégrales (en particulier le calcul par changement de variable.)

Proposition *(relation de Chasles)*

Si f est intégrable sur $]a,b[$ et si $a<c<b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Plus généralement, si f est intégrable sur un intervalle I, cette relation reste vraie pour trois points quelconques a,b,c de I (deux d'entre eux pouvant être les extrémités de I).

Proposition *(Calcul d'une intégrale par changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles ouverts, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J sur I.

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

L'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ l'application $\varphi'\ f\circ\varphi$ est intégrable sur I.

Dans ce cas, on a l'égalité : $\int_I f = \int_J |\varphi'|\ f\circ\varphi$.

Pour tous éléments a et b de J, on peut alors écrire : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Soit φ le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ défini par $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$.

Le changement de variable $x=\varphi(t)$ permet de constater que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

II.7 Extension de la notion d'intégrale

Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.

Soit F l'application définie sur $[a,b[$ par : $\forall x \geq a, F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il se peut que f ne soit pas intégrable sur $[a,b[$, mais que F possède une limite finie en b.

Dans ce cas cette limite est encore notée (mais de façon impropre) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple

– On vérifie que l'application $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

– Pourtant on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$.

– On notera donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$ (mais on parle d'intégrale impropre.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III Convergences de suites de fonctions intégrables

III.1 Convergence en moyenne ou en moyenne quadratique

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.
L'application $f \mapsto N(f) = \int_I |f|$ est une norme sur cet espace vectoriel.
On l'appelle la *norme de la convergence en moyenne*.

Définition

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est *de carré intégrable* sur I si $|f|^2$ est une fonction intégrable sur I.
On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I.

Propriétés

- Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, alors leur produit fg est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition et définition

L'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I est un espace vectoriel.
L'application $(f, g) \mapsto < f, g > = \int_I \bar{f} g$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
La norme déduite de ce produit scalaire est définie par $N_2(f) = \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}$.
On l'appelle norme de la *convergence en moyenne quadratique*.

Proposition

Soient f et g deux applications continues et de carré intégrable sur I.
Alors on a les inégalités : $|< f, g >| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\, N_2(g)$ (Cauchy-Schwarz).

Conséquence

Le produit scalaire est une application continue pour N_2. Autrement dit :
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = g$ (au sens de la norme N_2), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} < f_n, g_n > = < f, g >$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Théorèmes de convergence

Théorème *(Théorème de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
On suppose en outre que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux.
Alors l'application f est intégrable sur $I \Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0}$ est majorée.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Proposition *(Interversion d'une série et d'une intégrale)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, de somme S continue par morceaux.
On suppose en outre que la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n|$ est convergente.
Alors S est intégrable sur I. De plus on a : $N_1(S) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$ et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

On n'omettra cependant pas de vérifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.

Théorème *(Théorème de convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que cette suite est simplement convergente sur I vers une application f continue par morceaux.
On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.
Alors l'application f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Remarque

Ce résultat donne donc $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ avec des hypothèses de *convergence simple*.

Mais on n'oubliera pas l'*hypothèse de domination* : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

IV Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition *(Continuité sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur $[a,b]$, telle que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (*hypothèse de domination*).
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Cette application est continue sur J.

Remarque

Le résultat précédent est encore valable même si l'hypothèse de domination est seulement vérifiée sur tout segment de J.

Proposition *(Dérivation sous le signe intégral)*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.
Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$ une application continue de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.
On suppose qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, continues intégrables telles que :
$\forall x \in J,\ \forall t \in [a,b],\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$.
On peut alors définir une application g de J dans $\mathbb{K}$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $\forall x \in J,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ (Leibniz).

Remarque

Ce résultat reste valable même si les hypothèses de domination ne sont vérifiées que sur tous les sous-segments de J.

La propriété précédente peut se généraliser au cas d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ (l'hypothèse de domination doit porter alors sur les dérivées partielles successives de f par rapport à x.)

Exemple : la fonction "Gamma"

- La fonction "Gamma" d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- Cette application est de classe est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en tire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021