

IV Notions d'analyse vectorielle

Soit \mathcal{E}_3 l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point M de \mathcal{E}_3 est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.

On désigne par Ω un ouvert de \mathcal{E}_3 .

IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

Définition

|| Un *champ de scalaires* sur l'ouvert Ω est une application f de Ω dans \mathbb{R} .

Remarques

- On dit que ce champ est continu (respectivement de classe \mathcal{C}^k) si l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe \mathcal{C}^k).
- Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de f .

Définition

|| Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω est une application E de Ω dans \mathbb{R}^3 .

Remarques

- Un champ de vecteurs E est déterminé par trois champs de scalaires P, Q, R :
 $\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.
- Le champ E est continu (resp. de classe \mathcal{C}^k) $\Leftrightarrow P, Q, R$ sont continus (resp. de classe \mathcal{C}^k).
- Les *lignes de champ* de E sont les arcs Γ tels qu'en tout point M de Γ , le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en M à l'arc Γ .

IV.2 Circulation et gradient

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs)

|| Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy + R dz$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans Ω .

L'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ est appelée *circulation* du champ E le long de cet arc.

Elle se note $\int_{\gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\int_{\gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P(M) x'(t) + Q(M) y'(t) + R(M) z'(t)) dt$.

Définition (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires sur l'ouvert Ω de \mathcal{E}_3 , de classe \mathcal{C}^1 .

On appelle *gradient* de f le champ de vecteurs, noté $\text{grad}(f)$, défini par :

$$\forall M(x, y, z) \in \Omega, \text{grad}(f)(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right)$$

Définition (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un *champ de gradients* sur Ω s'il existe un champ f de classe \mathcal{C}^1 sur Ω tel que $E = \text{grad}(f)$.

Remarques

- Le champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un champ de gradients \Leftrightarrow la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
Plus précisément : $E = \text{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = df$.
- Si $E = \text{grad}(f)$, on dit que f est un *potentiel scalaire* du champ E . Les lignes de champs de E sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de f , appelées ici *équipotentiellles*.
- Soit $E = \text{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de E le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a, b], \varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire f .

IV.3 Divergence et rotationnel

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de \mathcal{E}_3 .

On appelle *divergence* de E , et on note $\text{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{div}(E)(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Interprétation

$\text{div}(E)$ est le produit scalaire $\vec{i} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial E}{\partial z}$.

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de \mathcal{E}_3 .

On appelle *rotationnel* de E , le champ de vecteurs défini sur Ω par :

$$\forall M \in \Omega, \text{rot}(E)(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M), \frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M), \frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M) \right)$$

Interprétation et notation

– $\text{rot}(E)$ est le champ de vecteurs $\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \text{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs E de classe \mathcal{C}^1 est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu F tel que, sur l'ouvert Ω , on ait $E = \text{rot}(F)$.

On dit alors que E dérive du *potentiel vecteur* F .

Définition (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires, de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert Ω de \mathcal{E}_3 .

On appelle *laplacien* de f le champ de scalaires, noté Δf défini par :

$$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M).$$

Remarques

– On remarque que le champ Δf s'écrit $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f))$.

– On dit que f est *harmonique* sur Ω si son laplacien Δf est nul sur Ω .

IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient f, g des champs scalaires de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soient E, F des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

On a les égalités suivantes :

$$\diamond \text{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{grad}(f) + \mu \text{grad}(g)$$

$$\diamond \text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f)$$

$$\diamond \text{div}(\lambda E + \mu F) = \lambda \text{div}(E) + \mu \text{div}(F)$$

$$\diamond \text{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \text{rot}(E) + \mu \text{rot}(F)$$

$$\diamond \text{div}(fE) = f \text{div}(E) + \langle \text{grad}(f), E \rangle$$

$$\diamond \text{rot}(fE) = f \text{rot}(E) + \text{grad}(f) \wedge E$$

$$\diamond \text{div}(E \wedge F) = \langle F, \text{rot}(E) \rangle - \langle E, \text{rot}(F) \rangle$$

– Soient f, g des champs scalaires de classe \mathcal{C}^2 sur Ω , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soient E, F des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 sur Ω .

On a les égalités suivantes :



- ◇ $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$
- ◇ $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2 \langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle$
- ◇ $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$ et $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$
- ◇ $\text{rot}(f\text{grad}(g)) = \text{grad}(f) \wedge \text{grad}(g)$

IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert Ω de \mathcal{E}_3 .

Proposition

Si le champ E , de classe \mathcal{C}^1 , est un champ de rotationnels alors $\text{div}(E) \equiv 0$.

La réciproque est vraie si l'ouvert Ω est étoilé. Les potentiels vecteurs de E sont alors les champs $F = F_0 + \text{grad}(f)$, où F_0 est un potentiel vecteur particulier et où f est un champ scalaire quelconque de classe \mathcal{C}^1 .

Proposition

Si le champ E , de classe \mathcal{C}^1 , est un champ de gradients alors $\text{rot}(E) \equiv 0$.

Si Ω est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de E sont alors les champs $f = f_0 + \lambda$, où f_0 est un potentiel scalaire particulier et où λ est un champ scalaire constant quelconque.