IV Notions d'analyse vectorielle

Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct.

Un point M de $\mathcal{E}_3$ est identifié au triplet (x, y, z) de ses coordonnées.

On désigne par Ω un ouvert de $\mathcal{E}_3$.

IV.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

Définition

Un *champ de scalaires* sur l'ouvert Ω est une application f de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarques

– On dit que ce champ est continu (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe $f(M) = f(x, y, z)$ est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$).

– Les surfaces d'équations $f(M) = \lambda$ sont appelées *surfaces de niveau* de f.

Définition

Un *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω est une application E de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques

– Un champ de vecteurs E est déterminé par trois champs de scalaires P, Q, R :
$\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3, E(M) = (P(M), Q(M), R(M))$.

– Le champ E est continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $\Leftrightarrow$ P, Q, R sont continus (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

– Les *lignes de champ* de E sont les arcs Γ tels qu'en tout point M de Γ, le vecteur $E(M)$ soit porté par la tangente en M à l'arc Γ.

IV.2 Circulation et gradient

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs)

Au champ $E = (P, Q, R)$ correspond la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Soit $\gamma = ([a, b], \varphi)$ un arc paramétré de support inclus dans Ω.

L'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ est appelée *circulation* du champ E le long de cet arc.

Elle se note $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\gamma \omega = \int_a^b (P(M)\, x'(t) + Q(M)\, y'(t) + R(M)\, z'(t))\,\mathrm{d}t$.

Définition (Gradient d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$, de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle *gradient* de f le champ de vecteurs, noté $\text{grad}(f)$, défini par :
$\forall M(x,y,z) \in \Omega, \text{grad}(f)(M) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$

Définition (Champs de gradients)

On dit qu'un champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un *champ de gradients* sur Ω s'il existe un champ f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω tel que $E = \text{grad}(f)$.

Remarques

- Le champ de vecteurs $E = (P, Q, R)$ est un champ de gradients $\Leftrightarrow$ la forme différentielle $w = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte.
  Plus précisément : $E = \text{grad}(f) \Leftrightarrow \omega = \mathrm{d}f$.
- Si $E = \text{grad}(f)$, on dit que f est un *potentiel scalaire* du champ E. Les lignes de champs de E sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de f, appelées ici *équipotentielles*.
- Soit $E = \text{grad}(f)$ un champ de gradients. La circulation de E le long de l'arc paramétré $\gamma = ([a, b], \varphi)$ est égale à $f(B) - f(A)$, c'est-à-dire à l'accroissement du potentiel scalaire f.

IV.3 Divergence et rotationnel

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *divergence* de E, et on note $\text{div}(E)$, le champ de scalaires défini sur Ω par :
$\forall M \in \Omega, \text{div}(E)(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(M) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(M) + \dfrac{\partial R}{\partial z}(M).$

Interprétation

$\text{div}(E)$ est le produit scalaire $\overrightarrow{i} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial x} + \overrightarrow{j} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial y} + \overrightarrow{k} \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs)

Soit $E = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.
On appelle *rotationnel* de E, le champ de vecteurs défini sur Ω par :
$\forall M \in \Omega, \text{rot}(E)(M) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y}(M) - \dfrac{\partial Q}{\partial z}(M), \dfrac{\partial P}{\partial z}(M) - \dfrac{\partial R}{\partial x}(M), \dfrac{\partial Q}{\partial x}(M) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(M)\right)$

Interprétation et notation

– $\mathrm{rot}(E)$ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{i} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x} + \overrightarrow{j} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y} + \overrightarrow{k} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}$.

– Avec l'opérateur "Nabla" :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \mathrm{rot}(E) = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition (Champs de rotationnels)

On dit qu'un champ de vecteurs E de classe $\mathcal{C}^1$ est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs continu F tel que, sur l'ouvert Ω, on ait $E = \mathrm{rot}(F)$.

On dit alors que E dérive du *potentiel vecteur* F.

Définition (Laplacien d'un champ de scalaires)

Soit f un champ de scalaires, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

On appelle *laplacien* de f le champ de scalaires, noté Δf défini par :

$\forall M \in \Omega, \Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$.

Remarques

– On remarque que le champ Δf s'écrit $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$.

– On dit que f est *harmonique* sur Ω si son laplacien Δf est nul sur Ω.

IV.4 Quelques formules d'analyse vectorielle

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :
  - ◇ $\mathrm{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{grad}(f) + \mu \mathrm{grad}(g)$
  - ◇ $\mathrm{grad}(fg) = f\mathrm{grad}(g) + g\mathrm{grad}(f)$
  - ◇ $\mathrm{div}(\lambda E + \lambda F) = \lambda \mathrm{div}(E) + \mu \mathrm{div}(F)$
  - ◇ $\mathrm{rot}(\lambda E + \mu F) = \lambda \mathrm{rot}(E) + \mu \mathrm{rot}(F)$
  - ◇ $\mathrm{div}(fE) = f\mathrm{div}(E) + < \mathrm{grad}(f), E >$
  - ◇ $\mathrm{rot}(fE) = f\mathrm{rot}(E) + \mathrm{grad}(f) \wedge E$
  - ◇ $\mathrm{div}(E \wedge F) = < F, \mathrm{rot}(E) > - < E, \mathrm{rot}(F) >$

– Soient f, g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soient E, F des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
On a les égalités suivantes :

- $\Delta(\lambda f+\mu g)=\lambda\Delta(f)+\mu\Delta(g)$
- $\Delta(fg)=f\Delta(g)+g\Delta(f)+2<\mathrm{grad}(f),\mathrm{grad}(g)>$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))=0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(E))=0$
- $\mathrm{rot}(f\mathrm{grad}(g))=\mathrm{grad}(f)\wedge\mathrm{grad}(g)$

IV.5 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Les champs sont supposés définis sur un ouvert Ω de $\mathcal{E}_3$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de rotationnels alors $\mathrm{div}(E)\equiv 0$.
La réciproque est vraie si l'ouvert Ω est étoilé. Les potentiels vecteurs de E sont alors les champs $F=F_0+\mathrm{grad}(f)$, où F_0 est un potentiel vecteur particulier et où f est un champ scalaire quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition

Si le champ E, de classe $\mathcal{C}^1$, est un champ de gradients alors $\mathrm{rot}(E)\equiv 0$.
Si Ω est étoilé, la réciproque est vraie : les potentiels scalaires de E sont alors les champs $f=f_0+\lambda$, où f_0 est un potentiel scalaire particulier et où λ est un champ scalaire constant quelconque.