IV Applications continues particulières

E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

IV.1 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit $\lambda > 0$. L'application f est dite λ-*lipschitzienne* ou encore lipschitzienne de rapport λ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Si $k < 1$, on dit que f est *contractante*.

Propriétés et exemples

- Si on remplace une norme par une norme équivalente, f reste lipschitzienne (mais pas avec le même λ.)
- Si f est λ-lipschitzienne, et si $\lambda < \mu$, f est encore μ-lipschitzienne.
- Toute application lipschitzienne est continue.
- Les *isométries* de E dans F $(\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|)$ sont 1-lipschitziennes donc continues.
- L'application *norme* de E dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne donc continue.

  En effet : $\forall (x, y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
- On suppose que E est de dimension $n \geq 1$ et est rapporté à une base (e).

  On munit par exemple E de la norme définie par $\|x\| = \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$.

  Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, soit π_k l'application qui à x associe sa composante x_k sur e_k.

  L'application π_k (dite k-ième application coordonnée) est lipschitzienne donc continue.

  En effet, pour tous vecteurs x et y de E : $|\pi_k(y) - \pi_k(x)| = |y_k - x_k| \leq \|y - x\|$
- Toute application polynômiale $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme : $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto P(u) = \sum \alpha_m\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ est continue (mais en général non lipschitzienne).

  En effet cette application est obtenue à partir des applications coordonnées $x \mapsto x_k$ par des opérations (sommes, produits) qui préservent la continuité.

IV.2 Applications linéaires continues

Important : dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

Proposition et définition

Soit f une application linéaire de E dans F. Les quantités suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Leur valeur commune est appelée norme de f et est notée $\|f\|$.

Définition équivalente

Avec ces notations $\|f\|$ est le réel k minimum tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\ \|x\|$.

Conséquence

Toute application linéaire de E (avec $\dim E < +\infty$) dans F est continue, et elle est même lipschitzienne.

Remarques et propriétés

- La valeur de $\|f\|$ dépend des normes qui ont été choisies sur E et F.
- Muni de l'application $f \mapsto \|f\|$, l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ de toutes les applications linéaires de E dans F est lui-même un espace vectoriel normé.
- On suppose que E et F sont tous deux de dimension finie.

  Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

  Alors $\|g \circ f\| \leq \|g\|\, \|f\|$.

  En particulier l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ de tous les endomorphismes de E est une *algèbre normée*.

IV.3 Applications bilinéaires continues

Important : dans les deux énoncés suivants, on suppose que E et F sont de dimension finie.

Définition

Soit f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Alors il existe un réel positif k tel que : $\forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq k\ \|x\|\, \|y\|$

Conséquence

Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemples d'applications bilinéaires continues

Dans ces exemples, il n'est pas nécessaire que E soit de dimension finie.

- L'application de $E \times E$ dans E, qui à (u, v) associe $u + v$, est continue.
- Si E est un espace préhilbertien, l'application $(u, v) \mapsto < u, v >$ est continue.

  C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|< u, v >| \leq \|u\|\, \|v\|$
- L'application de $\mathbb{K} \times E$ vers E définie par $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est continue.
- Si E est une algèbre normée, l'application $(u, v) \mapsto uv$ est continue.

  En particulier, l'application $(f, g) \mapsto f \circ g$ est continue sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.