

IV Applications continues particulières

E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur \mathbb{K} .

IV.1 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f une application définie sur une partie \mathcal{D} de E , à valeurs dans F .
 Soit $\lambda > 0$. L'application f est dite λ -lipschitzienne ou encore lipschitzienne de rapport λ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Si $\lambda < 1$, on dit que f est *contractante*.

Propriétés et exemples

- Si on remplace une norme par une norme équivalente, f reste lipschitzienne (mais pas avec le même λ .)
- Si f est λ -lipschitzienne, et si $\lambda < \mu$, f est encore μ -lipschitzienne.
- Toute application lipschitzienne est continue.
- Les *isométries* de E dans F ($\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$) sont 1-lipschitziennes donc continues.
- L'application *norme* de E dans \mathbb{R} est lipschitzienne donc continue.
 En effet : $\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.
- On suppose que E est de dimension $n \geq 1$ et est rapporté à une base (e) .
 On munit par exemple E de la norme définie par $\|x\| = \max \{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$.
 Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, soit π_k l'application qui à x associe sa composante x_k sur e_k .
 L'application π_k (dite k -ième application coordonnée) est lipschitzienne donc continue.
 En effet, pour tous vecteurs x et y de E : $|\pi_k(y) - \pi_k(x)| = |y_k - x_k| \leq \|y - x\|$
- Toute application polynomiale $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme : $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto P(u) = \sum \alpha_m x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ est continue (mais en général non lipschitzienne).
 En effet cette application est obtenue à partir des applications coordonnées $x \mapsto x_k$ par des opérations (sommations, produits) qui préservent la continuité.

IV.2 Applications linéaires continues

Important : dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

Proposition et définition

Soit f une application linéaire de E dans F . Les quantités suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \quad \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \quad \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Leur valeur commune est appelée norme de f et est notée $\|f\|$.

Définition équivalente

|| Avec ces notations $\|f\|$ est le réel k minimum tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$.

Conséquence

|| Toute application linéaire de E (avec $\dim E < +\infty$) dans F est continue, et elle est même lipschitzienne.

Remarques et propriétés

- La valeur de $\|f\|$ dépend des normes qui ont été choisies sur E et F .
- Muni de l'application $f \mapsto \|f\|$, l'espace vectoriel $L(E, F)$ de toutes les applications linéaires de E dans F est lui-même un espace vectoriel normé.
- On suppose que E et F sont tous deux de dimension finie.

Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G .

Alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

En particulier l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ de tous les endomorphismes de E est une *algèbre normée*.

IV.3 Applications bilinéaires continues

Important : dans les deux énoncés suivants, on suppose que E et F sont de dimension finie.

Définition

|| Soit f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G .

|| Alors il existe un réel positif k tel que : $\forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|$

Conséquence

|| Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemples d'applications bilinéaires continues

Dans ces exemples, il n'est pas nécessaire que E soit de dimension finie.

– L'application de $E \times E$ dans E , qui à (u, v) associe $u + v$, est continue.

– Si E est un espace préhilbertien, l'application $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ est continue.

C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

– L'application de $\mathbb{K} \times E$ vers E définie par $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est continue.

– Si E est une algèbre normée, l'application $(u, v) \mapsto uv$ est continue.

En particulier, l'application $(f, g) \mapsto f \circ g$ est continue sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.