III Continuité dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

Les normes sur E, F, G sont toutes notées $u \mapsto \|u\|$.

III.1 Limites dans un espace vectoriel normé

Définition

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Soit ℓ un élément de F.

On dit que f admet pour limite ℓ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} x \in \mathcal{D} \\ \|x - a\| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Propriétés et exemples

- La limite de f en a, si elle existe, est unique.
- L'existence d'une limite, et la valeur de cette limite, sont des notions qui ne dépendent pas des normes utilisées si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas en dimension finie.
- Dans le cas particulier où a appartient à $\mathcal{D}$, la limite ne peut être que $f(a)$.
- L' existence et la valeur de la limite de f en a ne changent pas si on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D} \cap B(a, r)$ où $r > 0$. On exprime cette propriété en disant que la notion de limite est une *notion locale*.
- Si $E = \mathbb{R}$ et avec $\mathcal{D} =]-\infty, a[$ ou $\mathcal{D} =]a, +\infty[$, on obtient les notions de limite à gauche et limite à droite.

Proposition *(Limite et composantes)*

On suppose que F est un espace vectoriel normé de dimension finie n muni d'une base (e).

Soient $f_1, \ldots, f_n$ les applications composantes de f, et $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les composantes de ℓ.

Alors la limite de f en a est égale à $\ell \Leftrightarrow$ pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, la limite de f_k en a est égale à l_k.

Exemple

Si $F = \mathbb{C}$, c'est-à-dire si f est à valeurs complexes, et si on note $f = g + ih$ (g et h à valeurs réelles), alors la limite de f en a est égale à $\ell \Leftrightarrow$:
- La limite de g en a est égale à $\mathrm{Re}(\ell)$.
- La limite de h en a est égale à $\mathrm{Im}(\ell)$

III.2 Opérations sur les limites

Proposition

Soient f et g deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans F.

Soient α et β deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que les limites de f, g, α, β en a existent et valent respectivement ℓ, ℓ', ρ, ρ'.

- La limite de $\alpha f + \beta g$, en a existe et vaut : $\rho\ell + \rho'\ell'$.
- Si F est une algèbre normée alors la limite de fg en a est égale à $\ell\ell'$.
- Si $F = \mathbb{K}$ et si $\ell \neq 0$, alors la limite de $\dfrac{1}{f}$ en a est $\dfrac{1}{\ell}$.

Proposition *(Limites numériques et inégalités)*

On reprend les notations précédentes, mais avec $F = \mathbb{K}$.

- Si $f(u) \leq \lambda$ sur $\mathcal{D}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lambda$ (même chose avec $\geq$.)
- Si $f(u) \leq g(u)$ sur $\mathcal{D}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- Corollaire *(Principe des gendarmes)* :
  Si $f \leq h \leq g$ sur $\mathcal{D}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

III.3 Limites et suites

Proposition *(Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)*

Soit $f : \mathcal{D} \subset E \to F$. On suppose que la limite de f en a est ℓ.

- Le vecteur ℓ est adhérent à $f(\mathcal{D})$.
- Soit u une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers a.
  Alors la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ.
- Réciproquement, supposons que pour toute suite u de $\mathcal{D}$ convergente vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ soit convergente dans F. Alors cette dernière limite est indépendante de la suite u choisie. Si on la note ℓ, alors la limite de f en a existe et vaut ℓ.

Proposition *(Critère de Cauchy d'existence d'une limite)*

Soit $f : \mathcal{D} \subset E \to F$. On suppose ici que F est de dimension finie.

Soit a un vecteur de E adhérent à $\mathcal{D}$. La limite de f en a existe si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad \left.\begin{array}{l} \|x - a\| \leq \delta \\ \|y - a\| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

III.4 Continuité dans un espace vectoriel normé

Définition *(Continuité en un point)*

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit a un point du domaine $\mathcal{D}$ de f.

On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a est $f(a)$.

Cela équivaut à dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\left.\begin{array}{r} x \in \mathcal{D} \\ \|x-a\| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \leq \varepsilon.$

Remarque

La définition précédente est inchangée si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas si E et F sont de dimension finie.

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est continue au point a de $\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ pour toute suite u de $\mathcal{D}$ convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Définition *(Continuité sur le domaine)*

L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est dite continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

On note souvent $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ l'ensemble des applications continues de $\mathcal{D} \subset E$ vers F.

Exemples

- Une application constante $\mathcal{D} \subset E \to F$ est continue.
- L'application identité de E dans E est continue.

III.5 Propriétés des applications continues

Proposition *(Opérations sur les applications continues)*

Soient f et g deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans F.

Soient α et β deux applications définies sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si f, g, α, β sont continues en a (respectivement sur le domaine $\mathcal{D}$), alors $\alpha f + \beta g$ est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$).
- En particulier $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si F est une algèbre normée et si f, g sont continues en a (resp. sur $\mathcal{D}$) il en est de même de l'application produit fg.
  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ est donc à son tour muni d'une structure d'algèbre

Proposition *(Composition d'applications continues)*

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit g une application définie sur une partie $\mathcal{D}'$ de F, à valeurs dans G.

On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$. De cette manière, $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$.

Si f continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Si f continue sur $\mathcal{D}$ et si g est continue sur $\mathcal{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Proposition *(Images réciproques d'ouverts ou de fermés par une application continue)*

Soit $f : D \subset E \to F$ une application continue.
- Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ s'écrit $\mathcal{D} \cap U$, où U est un ouvert de E.
- Pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ s'écrit $\mathcal{D} \cap U$, où U est un fermé de E.

En particulier, si f est continue de E dans F :
- L'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E.
- L'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E.

Proposition *(Utilisation des composantes en dimension finie)*

On suppose que $\dim F = n$ et que F est muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.

Soient $f_l, \ldots, f_n$ les applications composantes de $f : \mathcal{D} \subset E \to F$.

f est continue en a (resp. sur $\mathcal{D}$) $\Leftrightarrow$ toutes ses composantes f_k sont continues en a (resp. sur $\mathcal{D}$).

Proposition

Si f et g, définies sur E et à valeurs dans F sont continues, alors l'ensemble des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E.

En particulier si f et g sont égales sur une partie dense de E, alors f et g sont égales sur E.

Proposition *(Image continue d'un compact)*

Si f est continue de $\mathcal{D} \subset E$ dans F et si $\mathcal{D}$ est un compact de E, alors $f(\mathcal{D})$ est compact de F (autrement dit, l'image d'un compact par une application continue est encore un compact).

Conséquences
- Si $F = \mathbb{R}$: toute application numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- Si $E = F = \mathbb{R}$: l'image continue d'un segment est un segment.