

I Espaces vectoriels normés

I.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une *norme* si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$, et $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$.
- $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ (*inégalité triangulaire*)

On note en général $\|u\|$ plutôt que $N(u)$.

L'espace E , muni de la norme $u \mapsto \|u\|$ est appelé un *espace vectoriel normé*.

Définition

Si E est une algèbre munie d'une norme et si pour tout vecteurs u et v on a $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$, alors on dit que E est une *algèbre normée*.

Exemples de normes usuelles

- Dans \mathbb{K}^n , on pose, pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\begin{cases} \|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \|u\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ \|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \end{cases}$$

- Ces définitions s'étendent à un espace vectoriel E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$.

- Un espace préhilbertien E , c'est-à-dire muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un espace vectoriel normé avec la norme déduite de son produit scalaire : $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Remarque

Dans un espace vectoriel normé E , et pour tout vecteurs u et v : $|||u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$.

Ce résultat complète l'inégalité triangulaire.

I.2 Distance associée à une norme

Définition (*Distance associée à une norme*)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tous vecteurs u, v de E on pose $d(u, v) = \|v - u\|$.

Cette application est une *distance* sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0$ et $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u)$.
- $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

On l'appelle distance *induite* par la norme $u \mapsto \|u\|$ sur E .

Propriétés

- Pour tous vecteurs u, v, w de E , $|d(u, v) - d(v, w)| \leq d(u, w)$.
- La distance d est *invariante par translation* : $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, v) = d(u + w, v + w)$.

Définition (Distance d'un point à une partie de E)

- || Soit a un élément de l'espace vectoriel normé E , et X une partie non vide de E .
- || On appelle distance de a à X la quantité $d(a, X) = \inf\{d(a, u), u \in X\}$.

Définition (Boules et sphères)

- || Soit a un vecteur de E et r un réel strictement positif.
- $B(a, r) = \{u \in E, d(a, u) < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r .
- $\bar{B}(a, r) = \{u \in E, d(a, u) \leq r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r .
- $S(a, r) = \{u \in E, d(a, u) = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r .
- || Cas particulier : si $a = 0$ et $r = 1$, on parle de *boule unité* ou de *sphère unité*.

Définition (Parties bornées)

- || Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0, r)$.

Remarques

- Soit X une partie bornée et non vide de E .
- La quantité $\Delta(X) = \sup\{d(u, v), u \in X, v \in X\}$ est finie. On l'appelle le *diamètre* de X .
- Toute boule de rayon r est une partie bornée de diamètre $2r$.

I.3 Equivalence des normes

Définition (Normes équivalentes)

- || Deux normes N et N' sur l'espace vectoriel normé E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall u \in E, \alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$.

Remarques

- La définition précédente est symétrique par rapport à N et à N' . En effet :
$$\alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u) \Leftrightarrow \beta' N'(u) \leq N(u) \leq \alpha' N'(u) \text{ avec } \alpha' = \frac{1}{\alpha} \text{ et } \beta' = \frac{1}{\beta}.$$
- De même, si N et N' sont équivalentes, ainsi que N' et N'' , alors N et N'' sont équivalentes.
- Deux normes N et N' sont équivalentes \Leftrightarrow pour tout a de E , toute boule de centre a pour N (resp. pour N') contient une boule de centre a pour N' (resp. N).

Théorème (Équivalence des normes en dimension finie)

- || Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).



I.4 Ouverts et fermés

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} .

Définition (Point intérieur)

- || Soit A une partie de E . Un point a de E est dit *intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A .
- || Un point intérieur à A est évidemment un point de A .

Définition (Ensemble ouvert)

- || Soit A une partie de E .
- || On dit que A est un *ouvert* si tous ses points sont intérieurs à A .

Propriétés

- E et \emptyset sont des ouverts de E .
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions d'ouvert coïncident.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Définition (Point adhérent)

- || Soit A une partie de E .
- || Un point a de E est dit *adhérent* à A si, pour tout $r > 0$ l'intersection de A et de la boule ouverte $B(a, r)$ est non vide.
- || Tout point de A est évidemment adhérent à A .

Définition (Ensemble fermé)

- || Soit A une partie de E .
- || On dit que A est un *fermé* s'il contient tous ses points adhérents.

Propriétés

- E et \emptyset sont des fermés de E .
- A est fermé dans $E \Leftrightarrow$ son complémentaire dans E est ouvert.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions de fermé coïncident.
- Les boules fermées sont des fermés.
- Les sphères sont des fermés.
- Les unions *finies* de fermés sont des fermés.
- Les intersections *quelconques* de fermés sont des fermés.
- Les points, et plus généralement les ensembles finis, sont des fermés.

**Remarque**

Deux normes équivalentes définissent la même *topologie*, c'est-à-dire les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

Définition

On note A° et on appelle *intérieur* de A l'ensemble des points de A qui sont intérieurs à A .
On note \bar{A} et on appelle *adhérence* de A l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A .

Propriétés. Soit A une partie de E .

- On a $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$
- A est ouvert $\Leftrightarrow A^\circ = A$; A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.
- A° est le plus grand ouvert contenu dans A .
- \bar{A} est le plus petit fermé contenant A .

Définition (*Parties denses dans un evn*)

Soit A une partie de E .
On dit que A est *dense* dans E si $\bar{A} = E$, c'est-à-dire si tout point de E est adhérent à A .

Exemple

\mathbb{Q} et son complémentaire sont denses dans \mathbb{R} .