Espaces vectoriels normés

Sommaire

I Espaces vectoriels normés

I.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $N : \ E \to \mathbb{R}$ est une *norme* si :
- $\forall u \in E, N(u) \geq 0, \quad \text{et} \quad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$.
- $\forall (u,v) \in E^2, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire)*

On note en général $\|u\|$ plutôt que $N(u)$.

L'espace E, muni de la norme $u \mapsto \|u\|$ est appelé un *espace vectoriel normé*.

Définition

Si E est une algèbre munie d'une norme et si pour tout vecteurs u et v on a $\|uv\| \leq \|u\| \ \|v\|$, alors on dit que E est une *algèbre normée*.

Exemples de normes usuelles

- Dans $\mathbb{K}^n$, on pose, pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} \|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|u\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ \|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{cases}$$

- Ces définitions s'étendent à un espace vectoriel E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
- Un espace préhilbertien E, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, est un espace vectoriel normé avec la norme déduite de son produit scalaire : $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{< u, u >}$.

Remarque

Dans un espace vectoriel normé E, et pour tout vecteurs u et v : $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$.

Ce résultat complète l'inégalité triangulaire.

I.2 Distance associée à une norme

Définition *(Distance associée à une norme)*

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tous vecteur u, v de E on pose $d(u,v) = \|v - u\|$.

Cette application est une *distance* sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall (u,v) \in E^2, d(u,v) \geq 0 \quad \text{et} \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- $\forall (u,v) \in E^2, d(u,v) = d(v,u)$.
- $\forall (u,v,w) \in E^3, d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

On l'appelle distance *induite* par la norme $u \mapsto \|u\|$ sur E.

Propriétés

– Pour tous vecteurs u, v, w de E, $|d(u,v) - d(v,w)| \leq d(u,w)$.
– La distance d est *invariante par translation* : $\forall (u,v,w) \in E^3, d(u,v) = d(u+w, v+w)$.

Définition *(Distance d'un point à une partie de E)*

Soit a un élément de l'espace vectoriel normé E, et X une partie non vide de E.
On appelle distance de a à X la quantité $d(a,X) = \inf\{d(a,u), u \in X\}$.

Définition *(Boules et sphères)*

Soit a un vecteur de E et r un réel strictement positif.
– $B(a,r) = \{u \in E, d(a,u) < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
– $\bar{B}(a,r) = \{u \in E, d(a,u) \leq r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r.
– $S(a,r) = \{u \in E, d(a,u) = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r.
Cas particulier : si $a = 0$ et $r = 1$, on parle de *boule unité* ou de *sphère unité*.

Définition *(Parties bornées)*

Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0,r)$.

Remarques

– Soit X une partie bornée et non vide de E.

  La quantité $\Delta(X) = \sup\{d(u,v), u \in X, v \in X\}$ est finie. On l'appelle le *diamètre* de X.
– Toute boule de rayon r est une partie bornée de diamètre $2r$.

I.3 Equivalence des normes

Définition *(Normes équivalentes)*

Deux normes N et N' sur l'espace vectoriel normé E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall u \in E, \alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$.

Remarques

– La définition précédente est symétrique par rapport à N et à N'. En effet :

  $\alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u) \Leftrightarrow \beta' N'(u) \leq N(u) \leq \alpha' N'(u)$ avec $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\beta' = \dfrac{1}{\beta}$.

  De même, si N et N' sont équivalentes, ainsi que N' et N'', alors N et N'' sont équivalentes.
– Deux normes N et N' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ pour tout a de E, toute boule de centre a pour N (resp. pour N') contient une boule de centre a pour N' (resp. N).

Théorème *(Équivalence des normes en dimension finie)*

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).

I.4 Ouverts et fermés

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition *(Point intérieur)*

Soit A une partie de E. Un point a de E est dit *intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A.

Un point intérieur à A est évidemment un point de A.

Définition *(Ensemble ouvert)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *ouvert* si tous ses points sont intérieurs à A.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions d'ouvert coïncident.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Définition *(Point adhérent)*

Soit A une partie de E.

Un point a de E est dit *adhérent* à A si, pour tout $r > 0$ l'intersection de A et de la boule ouverte $B(a, r)$ est non vide.

Tout point de A est évidemment adhérent à A.

Définition *(Ensemble fermé)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est un *fermé* s'il contient tous ses points adhérents.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des fermés de E.
- A est fermé dans $E \Leftrightarrow$ son complémentaire dans E est ouvert.
- Si $E = \mathbb{R}$, et pour les intervalles, les deux notions de fermé coïncident.
- Les boules fermées sont des fermés.
- Les sphères sont des fermés.
- Les unions *finies* de fermés sont des fermés.
- Les intersections *quelconques* de fermés sont des fermés.
- Les points, et plus généralement les ensembles finis, sont des fermés.

Remarque

Deux normes équivalentes définissent la même *topologie*, c'est-à-dire les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

Définition

On note A° et on appelle *intérieur* de A l'ensemble des points de A qui intérieurs à A.

On note $\bar{A}$ et on appelle *adhérence* de A l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A.

Propriétés. Soit A une partie de E.

- On a $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$
- A est ouvert $\Leftrightarrow A^\circ = A$; $\quad A$ est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.
- A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
- $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Définition *(Parties denses dans un evn)*

Soit A une partie de E.

On dit que A est *dense* dans E si $\bar{A} = E$, c'est-à-dire si tout point de E est adhérent à A.

Exemple

$\mathbb{Q}$ et son complémentaire sont denses dans $\mathbb{R}$.

II Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

II.1 Généralités

Définition

Une *suite* de E est une application $u: \mathbb{N} \to E$.
L'image $u(n)$ d'un entier n est appelée le *terme d'indice* n de la suite u et est noté u_n.
La suite u elle-même est alors notée $(u_n)_{n\geq 0}$.
Si $E = \mathbb{K}$, on dit que u est une suite *numérique* (une suite *réelle* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et une suite *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

Définition *(Suite stationnaire)*

Une suite u de E est dite *stationnaire* si : $\exists a \in E, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
Si $n_0 = 0$, c'est-à-dire si pour tout n, $u_n = u_0$, alors on dit que la suite u est *constante*.

Définition *(Suite bornée)*

La suite u est dite *bornée* si l'ensemble image $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, c'est-à-dire s'il existe un réel positif M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Définition *(Suites extraites)*

On dit que la suite v est une *suite extraite* ou une *sous-suite* de la suite u s'il existe une application $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarques

- Avec les notations ci-dessus, on vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
- Comme cas particulier de suite extraite, on peut définir la suite des termes d'indices pairs ($\varphi(n) = 2n$) ou la suite des termes d'indices impairs ($\varphi(n) = 2n + 1$.)
- On peut également considérer $\varphi: n \mapsto n + k$, où k est fixé.

  La suite extraite v, définie par $v_0 = u_k, v_1 = u_{k+1}, v_2 = u_{k+2}, \ldots$ est alors notée $(u_n)_{n\geq k}$.

Définition *(Opérations sur les suites)*

L'ensemble de suites d'éléments de E est noté $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$, ou $E^{\mathbb{N}}$.
Cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on le munit des opérations suivantes :
- Addition : $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$.

  Le neutre est la *suite nulle*, définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
- Produit par un scalaire : $\lambda(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.

Si E est une algèbre de neutre 1, $E^{\mathbb{N}}$ est une algèbre avec : $(u_n)_{n\geq 0}(v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0}$.
Le neutre pour ce produit est la suite constante définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

II.2 Suites convergentes

Définition

La suite u de E est dite *convergente* (CV) s'il existe un élément ℓ de E tel que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Remarques

- Dans la définition précédente, on peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ par $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
  De même, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ s'écrit aussi $u_n \in \bar{B}(\ell, \varepsilon)$ ou $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.
- Une suite non convergente est dite *divergente* (DV).

Propriétés immédiates

- Si la suite u est convergente, l'élément ℓ de la définition est unique.
  On l'appelle *limite* de la suite u et on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
- Toute suite stationnaire est convergente vers la valeur où elle stationne.
- Si la suite u est convergente, ses suites extraites sont convergentes, avec la même limite.
  Conséquence : Si une suite extraite de u est divergente, la suite u est divergente.
  Même conclusion si deux suites extraites de u ont des limites différentes.
- Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.
- Si la suite u converge vers ℓ, la suite $n \mapsto \|u_n\|$ converge vers $\|l\|$.
- La suite u converge vers $\ell \Leftrightarrow$ la suite $n \mapsto \|u_n - \ell\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition *(Opérations sur les suites convergentes)*

Soient u et v deux suites convergentes de E. Soient α et β deux scalaires.
La suite de terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est convergente.
De plus on a : $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.
Si E est une algèbre normée : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Proposition *(Indépendance par rapport à la norme utilisée)*

Soit E un espace vectoriel et N et N' deux normes *équivalentes* sur E (ce qui est automatiquement le cas si on est en dimension finie).
Une suite u de E est convergente au sens de la norme $N \Leftrightarrow$ elle l'est au sens de la norme N', et dans ce cas les deux limites sont égales.

Proposition *(Utilisation des composantes en dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$.
Soit u une suite de E, de terme général $u^{(n)}$.

Pour tout entier n, posons $u^{(n)} = u_1^{(n)} e_1 + u_2^{(n)} e_2 + \cdots + u_p^{(n)} e_p = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k^{(n)} e_k$. Soit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)} = \ell \iff \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ \lim\limits_{n\to\infty} u_k^{(n)} = \ell_k$.

Exemples

- Soit z une suite à valeurs complexes. Pour tout n, soit $u_n = \mathrm{Re}\,(\mathrm{z_n})$ et $v_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

  La suite z converge vers le nombre complexe $\ell \Leftrightarrow$ les suites réeles u et v convergent respectivement vers $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}\,(\ell)$.
- Soit $n \mapsto A_n$ une suite de matrices, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

  Pour tout entier n, soit $a_{i,j}^{(n)}$ le terme d'indice (i, j) de A_n.

  La suite $n \mapsto A_n$ converge vers M (de terme général $m_{i,j}$) $\Leftrightarrow$, pour tous indices i et j, la suite numérique $n \mapsto a_{i,j}^{(n)}$ converge vers $m_{i,j}$.

II.3 Suites convergentes et adhérence

Proposition

Si la suite u converge vers ℓ, alors ℓ est adhérent à $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition *(Caractérisation de l'adhérence par les suites)*

Le point a de E est adhérent à la partie A de E $\Leftrightarrow$ il existe une suite de A qui converge vers a. Par conséquent A est fermé $\Leftrightarrow$ la limite de toute suite convergente de A est dans A.

II.4 Suites de Cauchy

Définition *(Suites de Cauchy)*

Une suite u de E est dite *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

Remarques et propiétés

- Cette définition peut s'écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon$.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème

Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente.

Plus généralement, toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé *de dimension finie* est convergente.

II.5 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition *(Parties compactes)*

Une partie non vide A de E est dite *compacte* si de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème *(Caractérisation des compacts en dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Les parties compactes de E sont les fermés bornés de E.

Conséquence

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

III Continuité dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

Les normes sur E, F, G sont toutes notées $u \mapsto \|u\|$.

III.1 Limites dans un espace vectoriel normé

Définition

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Soit ℓ un élément de F.

On dit que f admet pour limite ℓ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} x \in \mathcal{D} \\ \|x-a\| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Propriétés et exemples

- La limite de f en a, si elle existe, est unique.
- L'existence d'une limite, et la valeur de cette limite, sont des notions qui ne dépendent pas des normes utilisées si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas en dimension finie.
- Dans le cas particulier où a appartient à $\mathcal{D}$, la limite ne peut être que $f(a)$.
- L' existence et la valeur de la limite de f en a ne changent pas si on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D} \cap B(a, r)$ où $r > 0$. On exprime cette propriété en disant que la notion de limite est une *notion locale*.
- Si $E = \mathbb{R}$ et avec $\mathcal{D} =]-\infty, a[$ ou $\mathcal{D} =]a, +\infty[$, on obtient les notions de limite à gauche et limite à droite.

Proposition *(Limite et composantes)*

On suppose que F est un espace vectoriel normé de dimension finie n muni d'une base (e).

Soient $f_1, \ldots, f_n$ les applications composantes de f, et $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les composantes de ℓ.

Alors la limite de f en a est égale à $\ell \Leftrightarrow$ pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, la limite de f_k en a est égale à l_k.

Exemple

Si $F = \mathbb{C}$, c'est-à-dire si f est à valeurs complexes, et si on note $f = g + ih$ (g et h à valeurs réelles), alors la limite de f en a est égale à $\ell \Leftrightarrow$:
- La limite de g en a est égale à $\mathrm{Re}\,(\ell)$.
- La limite de h en a est égale à $\mathrm{Im}\,(\ell)$

III.2 Opérations sur les limites

Proposition

Soient f et g deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans F.

Soient α et β deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que les limites de f, g, α, β en a existent et valent respectivement ℓ, ℓ', ρ, ρ'.

- La limite de $\alpha f + \beta g$, en a existe et vaut : $\rho\ell + \rho'\ell'$.
- Si F est une algèbre normée alors la limite de fg en a est égale à $\ell\ell'$.
- Si $F = \mathbb{K}$ et si $\ell \neq 0$, alors la limite de $\dfrac{1}{f}$ en a est $\dfrac{1}{\ell}$.

Proposition *(Limites numériques et inégalités)*

On reprend les notations précédentes, mais avec $F = \mathbb{K}$.

- Si $f(u) \leq \lambda$ sur $\mathcal{D}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lambda$ (même chose avec $\geq$.)
- Si $f(u) \leq g(u)$ sur $\mathcal{D}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- Corollaire *(Principe des gendarmes)* :
  Si $f \leq h \leq g$ sur $\mathcal{D}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

III.3 Limites et suites

Proposition *(Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)*

Soit $f : \mathcal{D} \subset E \to F$. On suppose que la limite de f en a est ℓ.

- Le vecteur ℓ est adhérent à $f(\mathcal{D})$.
- Soit u une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers a.
  Alors la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ.
- Réciproquement, supposons que pour toute suite u de $\mathcal{D}$ convergente vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ soit convergente dans F. Alors cette dernière limite est indépendante de la suite u choisie. Si on la note ℓ, alors la limite de f en a existe et vaut ℓ.

Proposition *(Critère de Cauchy d'existence d'une limite)*

Soit $f : \mathcal{D} \subset E \to F$. On suppose ici que F est de dimension finie.

Soit a un vecteur de E adhérent à $\mathcal{D}$. La limite de f en a existe si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad \left.\begin{array}{l} \|x - a\| \leq \delta \\ \|y - a\| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

III.4 Continuité dans un espace vectoriel normé

Définition *(Continuité en un point)*

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit a un point du domaine $\mathcal{D}$ de f.

On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a est $f(a)$.

Cela équivaut à dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\left.\begin{array}{r} x \in \mathcal{D} \\ \|x-a\| \le \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \le \varepsilon.$

Remarque

La définition précédente est inchangée si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas si E et F sont de dimension finie.

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est continue au point a de $\mathcal{D} \Leftrightarrow$ pour toute suite u de $\mathcal{D}$ convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Définition *(Continuité sur le domaine)*

L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est dite continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

On note souvent $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ l'ensemble des applications continues de $\mathcal{D} \subset E$ vers F.

Exemples

- Une application constante $\mathcal{D} \subset E \to F$ est continue.
- L'application identité de E dans E est continue.

III.5 Propriétés des applications continues

Proposition *(Opérations sur les applications continues)*

Soient f et g deux applications définies sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans F.

Soient α et β deux applications définies sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si f, g, α, β sont continues en a (respectivement sur le domaine $\mathcal{D}$), alors $\alpha f + \beta g$ est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$).
- En particulier $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si F est une algèbre normée et si f, g sont continues en a (resp. sur $\mathcal{D}$) il en est de même de l'application produit fg.
  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ est donc à son tour muni d'une structure d'algèbre

Proposition *(Composition d'applications continues)*

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit g une application définie sur une partie $\mathcal{D}'$ de F, à valeurs dans G.

On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$. De cette manière, $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$.

Si f continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Si f continue sur $\mathcal{D}$ et si g est continue sur $\mathcal{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Proposition *(Images réciproques d'ouverts ou de fermés par une application continue)*

Soit $f : D \subset E \to F$ une application continue.

- Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ s'écrit $\mathcal{D} \cap U$, où U est un ouvert de E.
- Pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ s'écrit $\mathcal{D} \cap U$, où U est un fermé de E.

En particulier, si f est continue de E dans F :

- L'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E.
- L'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E.

Proposition *(Utilisation des composantes en dimension finie)*

On suppose que $\dim F = n$ et que F est muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.

Soient $f_l, \ldots, f_n$ les applications composantes de $f : \mathcal{D} \subset E \to F$.

f est continue en a (resp. sur $\mathcal{D}$) $\Leftrightarrow$ toutes ses composantes f_k sont continues en a (resp. sur $\mathcal{D}$).

Proposition

Si f et g, définies sur E et à valeurs dans F sont continues, alors l'ensemble des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E.

En particulier si f et g sont égales sur une partie dense de E, alors f et g sont égales sur E.

Proposition *(Image continue d'un compact)*

Si f est continue de $\mathcal{D} \subset E$ dans F et si $\mathcal{D}$ est un compact de E, alors $f(\mathcal{D})$ est compact de F (autrement dit, l'image d'un compact par une application continue est encore un compact).

Conséquences

- Si $F = \mathbb{R}$: toute application numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- Si $E = F = \mathbb{R}$: l'image continue d'un segment est un segment.

IV Applications continues particulières

E, F, G sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

IV.1 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit $\lambda > 0$. L'application f est dite λ-*lipschitzienne* ou encore lipschitzienne de rapport λ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Si $k < 1$, on dit que f est *contractante*.

Propriétés et exemples

- Si on remplace une norme par une norme équivalente, f reste lipschitzienne (mais pas avec le même λ.)
- Si f est λ-lipschitzienne, et si $\lambda < \mu$, f est encore μ-lipschitzienne.
- Toute application lipschitzienne est continue.
- Les *isométries* de E dans F $(\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|)$ sont 1-lipschitziennes donc continues.
- L'application *norme* de E dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne donc continue.

  En effet : $\forall (x, y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
- On suppose que E est de dimension $n \geq 1$ et est rapporté à une base (e).

  On munit par exemple E de la norme définie par $\|x\| = \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$.

  Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, soit π_k l'application qui à x associe sa composante x_k sur e_k.

  L'application π_k (dite k-ième application coordonnée) est lipschitzienne donc continue.

  En effet, pour tous vecteurs x et y de E : $|\pi_k(y) - \pi_k(x)| = |y_k - x_k| \leq \|y - x\|$
- Toute application polynômiale $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme : $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto P(u) = \sum \alpha_m\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ est continue (mais en général non lipschitzienne).

  En effet cette application est obtenue à partir des applications coordonnées $x \mapsto x_k$ par des opérations (sommes, produits) qui préservent la continuité.

IV.2 Applications linéaires continues

Important : dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

Proposition et définition

Soit f une application linéaire de E dans F. Les quantités suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\| \qquad \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Leur valeur commune est appelée norme de f et est notée $\|f\|$.

Définition équivalente

Avec ces notations $\|f\|$ est le réel k minimum tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\ \|x\|$.

Conséquence

Toute application linéaire de E (avec $\dim E < +\infty$) dans F est continue, et elle est même lipschitzienne.

Remarques et propriétés

- La valeur de $\|f\|$ dépend des normes qui ont été choisies sur E et F.
- Muni de l'application $f \mapsto \|f\|$, l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ de toutes les applications linéaires de E dans F est lui-même un espace vectoriel normé.
- On suppose que E et F sont tous deux de dimension finie.

  Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

  Alors $\|g \circ f\| \leq \|g\|\ \|f\|$.

  En particulier l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ de tous les endomorphismes de E est une *algèbre normée*.

IV.3 Applications bilinéaires continues

Important : dans les deux énoncés suivants, on suppose que E et F sont de dimension finie.

Définition

Soit f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Alors il existe un réel positif k tel que : $\forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq k\ \|x\|\ \|y\|$

Conséquence

Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemples d'applications bilinéaires continues

Dans ces exemples, il n'est pas nécessaire que E soit de dimension finie.

- L'application de $E \times E$ dans E, qui à (u, v) associe $u + v$, est continue.
- Si E est un espace préhilbertien, l'application $(u, v) \mapsto < u, v >$ est continue.

  C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|< u, v >| \leq \|u\|\ \|v\|$
- L'application de $\mathbb{K} \times E$ vers E définie par $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est continue.
- Si E est une algèbre normée, l'application $(u, v) \mapsto uv$ est continue.

  En particulier, l'application $(f, g) \mapsto f \circ g$ est continue sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.