III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

III.1 Définitions

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Soient a, b, c trois applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  On note $x : \ t \mapsto x(t)$ la fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On considère ici les équations :
  $(E) : \ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$, et $(H) : \ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0$.
  (E) est appelée une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.
  On dit que (H) est l'équation linéaire homogène associée à (E).
- Les solutions de (E) et (H) sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1

- Soit $t \mapsto x(t)$ une application définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On lui associe l'application $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.
- Alors l'équation (E) équivaut au système :

$$(S) : \ \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

  qui est du type $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
  De même l'équation (H) équivaut au système homogène $(S_H) : \ X'(t) = AX(t)$.

III.3 Problème de Cauchy

Proposition

Soit (t_0, x_0, m) un triplet quelconque de $I \times \mathbb{K}$.
L'équation (E) possède une solution et une seule qui vérifie $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = m$.
L'intervalle de définition de cette solution est I tout entier.

Interprétation

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe donc une unique "courbe intégrale" qui passe par le point (x_0, y_0) avec une tangente de coefficient directeur m, et cette courbe intégrale est "définie" sur tout I.

III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien

Proposition

Pour tout t_0 de I, l'application $h \mapsto (h(t_0), h'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
L'ensemble des solutions de (H) est donc un plan vectoriel, inclus dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$).

Définition

Soient h et k deux solutions de (H).

Le *wronskien* de h et k est l'application W définie sur I par : $\forall t \in I, W(t) = \begin{vmatrix} h(t) & k(t) \\ h'(t) & k'(t) \end{vmatrix}$.

Proposition

Deux solutions h, k de (H) forment une base de $\mathcal{S}(H))$ si et seulement si leur wronskien $W(t)$ est non nul en un point : il est alors non nul en tout point.

Remarques

- Comme d'habitude, la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de (H) à une solution particulière de (E).
- Si h, k est une base de solutions de (H), et si y_0 est une solution particulière de (E), la solution générale de (E) s'écrit donc : $y(t) \equiv y_0(t) + \lambda h(t) + \mu k(t)$.

III.5 Méthode de variation des constantes

Proposition

Soit h, k une base de solutions de l'équation homogène (H).
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple (λ, μ) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
$\forall t \in I, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} k(t) \\ k'(t) \end{pmatrix}$.
Le couple (λ, μ) vérifie : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.

- La méthode de variation des constantes consiste à chercher la solution générale $x(t)$ de (E), à partir d'un système fondamental h, k de solutions de (H), en cherchant $x(t)$ sous la forme suivante : $\forall t \in I, x(t) = \lambda(t)h(t) + \mu(t)k(t)$,
  et avec la condition supplémentaire : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.
- Quand on exprime qu'une telle fonction x est solution de (E), on est conduit au système :
  $\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)h'(t) + \mu'(t)k'(t) = c(t) \\ \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0 \end{cases}$
- Pour tout t de I, ce système possède une solution unique $(\lambda'(t), \mu'(t))$.
  Il ne reste plus qu'à primitiver $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, pour obtenir la solution générale de (E).

III.6 Cas où on connait une solution de (H)

- Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une base de solutions de (H) (sauf cas particulier). Mais supposons connue une solution h de (H), ne s'annulant pas sur un sous-intervalle J de I.
  On peut alors chercher les solutions $t \mapsto x(t)$ de (E) sur J, en effectuant le changement de fonction inconnue définie par : $x(t) = h(t)y(t)$.

– Avec ces notations, la fonction x est solution de (E) sur l'intervalle J si et seulement si, pour tout t de J :
$$y''(t) + \Bigl(2\frac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\Bigr)\, y'(t) = \frac{c(t)}{h(t)}$$
Le changement $z = y'(t)$ ramène alors à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

III.7 Utilisation de séries entières

– Dans certains cas, on cherche une solution de (E) (ou de (H)) qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine.
– Pour que cela soit possible, il faut que les coefficients $a(t), b(t), c(t)$ de l'équation soient eux-mêmes développables en série entière.
Un cas fréquent est celui où $a(t), b(t), c(t)$ sont des polynômes.
– On injecte alors dans (E) le développement de $x(t)$, dont on suppose à priori que le rayon de convergence R est strictement positif, les coefficients a_n étant indéterminés.
On regroupe les termes par degrés, et on identifie.
Cette identification permet de le plus souvent de trouver des relations de récurrence entre les coefficients a_n et de les calculer (éventuellement en fonction d'un ou de deux d'entre eux, par exemple a_0 ou a_1, qui resteraient alors indéterminés).
On vérifie enfin que le rayon de convergence est strictement positif.
– Si possible, on exprime cette série entière à l'aide de fonctions élémentaires.

III.8 Cas des équations à coefficients constants

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

Soit $t \mapsto c(t)$ une application continue, de I dans $\mathbb{K}$.

On considère ici les équations différentielles $\begin{cases} (E) :\ x" + ax' + bx = c(t) \\ (H) :\ x" + ax' + bx = 0 \end{cases}$

Le système linéaire associé à (E) s'écrit

$$(S) \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est : $\chi = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

L'équation $(\mathcal{C})$: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E) et de (H).

Résolution de (H)

– **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de $(\mathcal{C})$.
  ◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2.
  Une base de solutions de (H) est $t \mapsto \exp(\lambda_1 t)$, $t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$.
  ◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a une solution double λ.
  Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\lambda t)$ et $t \mapsto t\exp(\lambda t)$.

- **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**
  - ⋄ Si $\Delta = 0$ voir ci-dessus.
  - ⋄ Si $\Delta > 0$ voir le cas $\Delta \neq 0$ ci-dessus.
  - ⋄ Si $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
    Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, et $t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$.
- **Cas d'un second membre du type** $\exp(\alpha t)P(t)$
  Soient α un élément de $\mathbb{K}$, et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

  On considère l'équation (E) : $x'' + ax' + bx = \exp(\alpha t)P(t)$,
  - ⋄ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ⋄ Si α est racine simple de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)tQ(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ⋄ Si α est racine double de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)t^2Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.