III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

III.1 Définitions

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Soient a, b, c trois applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  On note $x :\ t \mapsto x(t)$ la fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On considère ici les équations :
  $(E) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$, et $(H) :\ x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0$.
  (E) est appelée une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.
  On dit que (H) est l'équation linéaire homogène associée à (E).
- Les solutions de (E) et (H) sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1

- Soit $t \mapsto x(t)$ une application définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On lui associe l'application $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.
- Alors l'équation (E) équivaut au système :

$$(S) :\ \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

  qui est du type $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
  De même l'équation (H) équivaut au système homogène $(S_H) :\ X'(t) = AX(t)$.

III.3 Problème de Cauchy

Proposition

Soit (t_0, x_0, m) un triplet quelconque de $I \times \mathbb{K}$.
L'équation (E) possède une solution et une seule qui vérifie $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = m$.
L'intervalle de définition de cette solution est I tout entier.

Interprétation

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe donc une unique "courbe intégrale" qui passe par le point (x_0, y_0) avec une tangente de coefficient directeur m, et cette courbe intégrale est "définie" sur tout I.

III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien

Proposition

Pour tout t_0 de I, l'application $h \mapsto (h(t_0), h'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
L'ensemble des solutions de (H) est donc un plan vectoriel, inclus dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}))$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Définition

Soient h et k deux solutions de (H).

Le *wronskien* de h et k est l'application W définie sur I par : $\forall t \in I, W(t) = \begin{vmatrix} h(t) & k(t) \\ h'(t) & k'(t) \end{vmatrix}$.

Proposition

Deux solutions h, k de (H) forment une base de $\mathcal{S}(H))$ si et seulement si leur wronskien $W(t)$ est non nul en un point : il est alors non nul en tout point.

Remarques

- Comme d'habitude, la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de (H) à une solution particulière de (E).
- Si h, k est une base de solutions de (H), et si y_0 est une solution particulière de (E), la solution générale de (E) s'écrit donc : $y(t) \equiv y_0(t) + \lambda h(t) + \mu k(t)$.

III.5 Méthode de variation des constantes

Proposition

Soit h, k une base de solutions de l'équation homogène (H).
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple (λ, μ) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
$\forall t \in I, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} k(t) \\ k'(t) \end{pmatrix}$.
Le couple (λ, μ) vérifie : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.

- La méthode de variation des constantes consiste à chercher la solution générale $x(t)$ de (E), à partir d'un système fondamental h, k de solutions de (H), en cherchant $x(t)$ sous la forme suivante : $\forall t \in I, x(t) = \lambda(t)h(t) + \mu(t)k(t)$,
et avec la condition supplémentaire : $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$.
- Quand on exprime qu'une telle fonction x est solution de (E), on est conduit au système :
$\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)h'(t) + \mu'(t)k'(t) = c(t) \\ \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0 \end{cases}$
- Pour tout t de I, ce système possède une solution unique $(\lambda'(t), \mu'(t))$.
Il ne reste plus qu'à primitiver $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, pour obtenir la solution générale de (E).

III.6 Cas où on connait une solution de (H)

- Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une base de solutions de (H) (sauf cas particulier). Mais supposons connue une solution h de (H), ne s'annulant pas sur un sous-intervalle J de I.
On peut alors chercher les solutions $t \mapsto x(t)$ de (E) sur J, en effectuant le changement de fonction inconnue définie par : $x(t) = h(t)y(t)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– Avec ces notations, la fonction x est solution de (E) sur l'intervalle J si et seulement si, pour tout t de J :
$$y''(t) + \left(2\frac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\right) y'(t) = \frac{c(t)}{h(t)}$$
Le changement $z = y'(t)$ ramène alors à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

III.7 Utilisation de séries entières

– Dans certains cas, on cherche une solution de (E) (ou de (H)) qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine.
– Pour que cela soit possible, il faut que les coefficients $a(t), b(t), c(t)$ de l'équation soient eux-mêmes développables en série entière.
Un cas fréquent est celui où $a(t), b(t), c(t)$ sont des polynômes.
– On injecte alors dans (E) le développement de $x(t)$, dont on suppose à priori que le rayon de convergence R est strictement positif, les coefficients a_n étant indéterminés.
On regroupe les termes par degrés, et on identifie.
Cette identification permet de le plus souvent de trouver des relations de récurrence entre les coefficients a_n et de les calculer (éventuellement en fonction d'un ou de deux d'entre eux, par exemple a_0 ou a_1, qui resteraient alors indéterminés).
On vérifie enfin que le rayon de convergence est strictement positif.
– Si possible, on exprime cette série entière à l'aide de fonctions élémentaires.

III.8 Cas des équations à coefficients constants

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.
Soit $t \mapsto c(t)$ une application continue, de I dans $\mathbb{K}$.
On considère ici les équations différentielles $\begin{cases} (E) : \ x'' + ax' + bx = c(t) \\ (H) : \ x'' + ax' + bx = 0 \end{cases}$

Le système linéaire associé à (E) s'écrit
$$(S) \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est : $\chi = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$.
L'équation $(\mathcal{C}) : \ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E) et de (H).

Résolution de (H)

– **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de $(\mathcal{C})$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2.
Une base de solutions de (H) est $t \mapsto \exp(\lambda_1 t)$, $t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$.
◇ Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a une solution double λ.
Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\lambda t)$ et $t \mapsto t\exp(\lambda t)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- **Résolution de (H) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**
  - ◇ Si $\Delta = 0$ voir ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta > 0$ voir le cas $\Delta \neq 0$ ci-dessus.
  - ◇ Si $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
    Une base de solutions de (H) est : $t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, et $t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$.
- **Cas d'un second membre du type** $\exp(\alpha t)P(t)$
  Soient α un élément de $\mathbb{K}$, et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  On considère l'équation (E) : $x'' + ax' + bx = \exp(\alpha t)P(t)$,
  - ◇ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine simple de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)tQ(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
  - ◇ Si α est racine double de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
    (E) a une unique solution $\exp(\alpha t)t^2Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021