



# I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice constante de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

## I.1 Généralités

### Définition

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non vide ni réduit à un point, et  $n$  un entier naturel.

Soit  $t \mapsto A(t)$  une application continue sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $t \mapsto B(t)$  une application continue sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$ .

Soit  $t \mapsto X(t)$  une application définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$ .

On dit que l'application  $X$  est solution sur  $I$  du système  $(S) : X' = A(t)X + B(t)$ , si :

- L'application  $X$  est dérivable sur  $I$ .
- Pour tout  $t$  de  $I$ , on a l'égalité  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ .

### Remarques et définitions

- On dit que  $S$  est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
- Le système  $(H) : X' = A(t)X$  est appelé *système homogène* associé à  $(S)$ .
- Toute solution de  $(S)$  ou de  $(H)$  sur  $I$  est nécessairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

### Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution  $t \mapsto X(t)$  de  $(S)$  prenant en un point donné  $t_0$  de  $I$  une valeur donnée  $X_0$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

### Proposition

Pour le système  $(S)$ , et donc pour le système  $(H)$ , le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle  $I$  tout entier.

### Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de $(H)$ )

L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de  $(H)$  sur  $I$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

### Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de $(S)$ )

La solution générale de  $(S)$  s'obtient en ajoutant, à la solution générale de  $(H)$ , une solution particulière  $X_0$  de  $(S)$ .

### Conséquence

Si  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  forment une base de  $\mathcal{S}_H$  la solution générale de  $(S)$  s'écrit donc :

$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \dots + \lambda_n Z_n(t)$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ .

**Proposition** (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le "second membre"  $B(t)$  de  $(S)$  s'écrit  $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \dots + \alpha_k B_k(t)$ , où les applications  $B_1, \dots, B_k$  sont continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}^n$ , et où les  $\alpha_j$  sont dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose en outre que les applications  $X_j : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  sont des solutions particulières du système  $(S_j) : X' = A(t)X + B_j(t)$ .

Alors l'application  $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$  est une solution particulière de  $(S)$  sur  $I$ .

## I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle  $t \mapsto A(t)$  est constante, on dit que le système différentiel homogène  $(H)$  est à coefficients constants.

Si on note  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , et si  $A$  est la matrice de terme général  $a_{ij}$ , alors le système homogène  $(H)$  s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x'_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1j} x_j(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2j} x_j(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_i(t) = a_{i1} x_1(t) + a_{i2} x_2(t) + \dots + a_{ij} x_j(t) + \dots + a_{in} x_n(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_n(t) = a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nj} x_j(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

### Utilisation de la réduction de la matrice

#### – Cas où la matrice du système est diagonalisable

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Il existe donc une matrice diagonale  $D$  (de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ) et une matrice  $P$  de  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

On effectue le changement de fonction inconnue défini par  $X(t) = PY(t)$ .

Le système  $(H)$  devient alors :

$$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La  $k$ -ème ligne  $(L'_k)$  de  $(H')$  s'écrit  $y'_k(t) = \lambda_k y_k(t)$  : c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est  $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$ , avec  $\alpha_k$  dans  $\mathbb{K}$ .

On trouve alors la solution générale de  $(H)$  en revenant à  $X = PY$ .

Si on note  $u_1, \dots, u_n$  les vecteurs colonnes de  $P$  (qui sont vecteurs propres de  $A$  pour les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ), la solution générale de  $(H)$  s'écrit :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) u_2 + \dots + \alpha_n \exp(\lambda_n t) u_n$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est un élément quelconque de  $\mathbb{K}^n$ .

On voit bien que  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications  $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$ , où  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ , pour les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Remarque : Pour résoudre  $(H)$ , le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas nécessaire.

### – Diagonalisation dans $\mathbb{C}$ , pour un système réel

On suppose ici que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (sans l'être dans  $\mathbb{R}$ ) on peut résoudre  $(S)$  en utilisant la diagonalisation de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de  $A$  pour que  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ,  $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$ ,  $\lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$  (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres  $u_2 = \overline{u_1}, \dots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$ , puis  $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n$  (valeurs propres réelles).

A partir de la base de  $\mathcal{S}_H$  formée des applications  $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) on construit une base de solutions réelles de  $(H)$  de la manière suivante :

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$ , on remplace  $\varphi_{2k}$  et  $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$  par  $\operatorname{Re}(\varphi_{2k})$  et par  $\operatorname{Im}(\varphi_{2k})$ .

Pour tout  $k > p$ , on conserve les applications  $\varphi_k$  car elles sont à valeurs réelles.

### – Utilisation de la trigonalisation (complément)

On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La matrice  $A$  est (au besoin dans  $\mathbb{C}$ ) trigonalisable.

Il existe deux matrices,  $P$  inversible, et  $T$  triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$ ) telles que  $T = P^{-1}AP$ .

Les systèmes  $(S)$  et  $(H)$  deviennent, en posant encore  $X = PY$ , et  $C(t) = P^{-1}B(t)$  :

$(S')$  :  $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$ , et  $(H)$  :  $Y'(t) = TY(t)$ .

La  $n$ -ième ligne  $(L'_n)$  de  $(S')$  est :  $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$ .

La solution générale de  $(L'_n)$  s'écrit  $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$  (où  $\alpha$  est dans  $\mathbb{K}$  et où  $\beta$  est une solution particulière de  $(L'_n)$ ).

On résout alors progressivement  $(E')$  de la dernière équation à la première.

On obtient enfin la solution générale de  $(E)$  en revenant à  $X = PY$ .

Remarque : là encore, le calcul de  $P^{-1}$  est inutile pour résoudre  $(H)$ .

## I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

### Définition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

L'exponentielle de  $A$  est la limite, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de la suite de terme général  $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k$ .

On note  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

### Remarques et propriétés

– Pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ ,  $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda) I_n$ . En particulier  $\exp(0_n) = I_n$ .

– Si  $A, B$  commutent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

– En particulier, pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A)$  est une matrice carrée inversible et  $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$ .

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ , et  $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$ .

– Si  $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , alors  $\exp(A) = \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$ .



- L'application  $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$  est dérivable, et  $f'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A$ .
- Supposons que  $A$  s'écrive  $A = D + N$ , avec  $D$  diagonale,  $N$  strictement triangulaire, et telles que  $ND = DN$ . Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise  $A$ .

Soit  $r$  un entier tel que  $N^r = 0$ .

$$\text{Alors } \exp(A) = \exp(D) \exp(N) = \exp(D) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}.$$

### Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de $(H)$

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère le système linéaire  $(H) : X'(t) = AX(t)$ .

Soit  $t_0$  un réel, et  $X_0$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ .

L'unique solution de  $(H)$  qui vaut  $X_0$  au point  $t_0$  est :  $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$ .