I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires $X' = AX$, où A est une matrice constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

I.1 Généralités

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, et n un entier naturel.
Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $t \mapsto B(t)$ une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $t \mapsto X(t)$ une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
On dit que l'application X est solution sur I du système $(S)\ :\ X' = A(t)X + B(t)$, si :
- L'application X est dérivable sur I.
- Pour tout t de I, on a l'égalité $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarques et définitions

- On dit que S est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
- Le système $(H)\ :\ X' = A(t)X$ est appelé *système homogène* associé à (S).
- Toute solution de (S) ou de (H) sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution $t \mapsto X(t)$ de (S) prenant en un point donné t_0 de I une valeur donnée X_0 dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Pour le système (S), et donc pour le système (H), le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle I tout entier.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (H))

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un espace vectoriel de dimension n.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de (S))

La solution générale de (S) s'obtient en ajoutant, à la solution générale de (H), une solution particulière X_0 de (S).

Conséquence

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ forment une base de $\mathcal{S}_H$ la solution générale de (S) s'écrit donc :
$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \cdots + \lambda_n Z_n(t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le “second membre” $B(t)$ de (S) s'écrit $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \cdots + \alpha_k B_k(t)$, où les applications $B_1, \ldots, B_k$ sont continues de I dans $\mathbb{K}^n$, et où les α_j sont dans $\mathbb{K}$.

On suppose en outre que les applications $X_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ sont des solutions particulières du système $(S_j)\ :\ X' = A(t)X + B_j(t)$.

Alors l'application $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$ est une solution particulière de (S) sur I.

I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle $t \mapsto A(t)$ est constante, on dit que le système différentiel homogène (H) est à coefficients constants.

Si on note $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, et si A est la matrice de terme général a_{ij}, alors le système homogène (H) s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) + \cdots + a_{1j}\, x_j(t) + \cdots + a_{1n}\, x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) + \cdots + a_{2j}\, x_j(t) + \cdots + a_{2n}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}\, x_1(t) + a_{i2}\, x_2(t) + \cdots + a_{ij}\, x_j(t) + \cdots + a_{in}\, x_n(t) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_2(t) + \cdots + a_{nj}\, x_j(t) + \cdots + a_{nn}\, x_n(t) \end{cases}$$

Utilisation de la réduction de la matrice

– **Cas où la matrice du système est diagonalisable**

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.
Il existe donc une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) et une matrice P de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$.
Le système (H) devient alors :

$$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La k-ème ligne (L_k') de (H') s'écrit $y_k'(t) = \lambda_k y_k(t)$: c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$, avec α_k dans $\mathbb{K}$.
On trouve alors la solution générale de (H) en revenant à $X = PY$.
Si on note $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs colonnes de P (qui sont vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$), la solution générale de (H) s'écrit :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) u_2 + \cdots + \alpha_n \exp(\lambda_n t) u_n$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.
On voit bien que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$, où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Remarque : Pour résoudre (H), le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

- **Diagonalisation dans $\mathbb{C}$, pour un système réel**
  On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (sans l'être dans $\mathbb{R}$) on peut résoudre (S) en utilisant la diagonalisation de A dans $\mathbb{C}$.
  Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de A pour que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$ (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres $u_2 = \overline{u_1}, \ldots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$, puis $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$ (valeurs propres réelles).
  A partir de la base de $\mathcal{S}_H$ formée des applications $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$ (pour $1 \leq k \leq n$) on construit une base de solutions réelles de (H) de la manière suivante :
  Pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, on remplace φ_{2k} et $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$ par $\text{Re}\,(\varphi_{2k})$ et par $\text{Im}\,(\varphi_{2k})$.
  Pour tout $k > p$, on conserve les applications φ_k car elles sont à valeurs réelles.

- **Utilisation de la trigonalisation (complément)**
  On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice A est (au besoin dans $\mathbb{C}$) trigonalisable.
  Il existe deux matrices, P inversible, et T triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A) telles que $T = P^{-1}AP$.
  Les systèmes (S) et (H) deviennent, en posant encore $X = PY$, et $C(t) = P^{-1}B(t)$:
  $(S') : Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$, et $(H) : Y'(t) = TY(t)$.
  La n-ième ligne (L'_n) de (S') est : $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$.
  La solution générale de (L'_n) s'écrit $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$ (où α est dans $\mathbb{K}$ et où β est une solution particulière de (L'_n)).
  On résout alors progressivement (E') de la dernière équation à la première.
  On obtient enfin la solution générale de (E) en revenant à $X = PY$.
  Remarque : là encore, le calcul de P^{-1} est inutile pour résoudre (H).

I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'exponentielle de A est la limite, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de la suite de terme général $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$.
On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Remarques et propriétés

- Pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda) I_n$. En particulier $\exp(0_n) = I_n$.
- Si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
- En particulier, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est une matrice carrée inversible et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.
  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$, et $\exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.
- Si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = diag(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n))$.

- L'application $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et $f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- Supposons que A s'écrive $A = D + N$, avec D diagonale, N strictement triangulaire, et telles que $ND = DN$. Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise A.
  Soit r un entier tel que $N^r = 0$.
  Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\frac{N^k}{k!}$.

Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de (H)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le système linéaire $(H) : X'(t) = AX(t)$.

Soit t_0 un réel, et X_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

L'unique solution de (H) qui vaut X_0 au point t_0 est : $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$.