



# Équations différentielles linéaires

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1</b>	<b>2</b>
I.1	Généralités	2
I.2	Systèmes homogènes à coefficients constants	3
I.3	Exponentielles de matrices (compléments)	4
<b>II</b>	<b>“Equa diffs” linéaires scalaires d'ordre 1</b>	<b>6</b>
II.1	Définitions	6
II.2	Solution générale de l'équation (E)	6
II.3	Méthode de variation de la constante	6
<b>III</b>	<b>Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2</b>	<b>7</b>
III.1	Définitions	7
III.2	Réduction à un système linéaire d'ordre 1	7
III.3	Problème de Cauchy	7
III.4	Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien	7
III.5	Méthode de variation des constantes	8
III.6	Cas où on connaît une solution de (H)	8
III.7	Utilisation de séries entières	9
III.8	Cas des équations à coefficients constants	9

---



# I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

NB : seuls les systèmes différentiels linéaires  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice constante de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , sont au programme de la classe PC. Tout le reste est en complément.

## I.1 Généralités

### Définition

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non vide ni réduit à un point, et  $n$  un entier naturel.

Soit  $t \mapsto A(t)$  une application continue sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $t \mapsto B(t)$  une application continue sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$ .

Soit  $t \mapsto X(t)$  une application définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$ .

On dit que l'application  $X$  est solution sur  $I$  du système  $(S) : X' = A(t)X + B(t)$ , si :

- L'application  $X$  est dérivable sur  $I$ .
- Pour tout  $t$  de  $I$ , on a l'égalité  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ .

### Remarques et définitions

- On dit que  $S$  est un système différentiel linéaire d'ordre 1.
- Le système  $(H) : X' = A(t)X$  est appelé *système homogène* associé à  $(S)$ .
- Toute solution de  $(S)$  ou de  $(H)$  sur  $I$  est nécessairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

### Définition (Problème de Cauchy)

Le problème de Cauchy consiste à chercher s'il existe une solution  $t \mapsto X(t)$  de  $(S)$  prenant en un point donné  $t_0$  de  $I$  une valeur donnée  $X_0$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

### Proposition

Pour le système  $(S)$ , et donc pour le système  $(H)$ , le problème de Cauchy admet une solution unique, sur l'intervalle  $I$  tout entier.

### Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de $(H)$ )

L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de  $(H)$  sur  $I$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

### Proposition (Structure de l'ensemble des solutions de $(S)$ )

La solution générale de  $(S)$  s'obtient en ajoutant, à la solution générale de  $(H)$ , une solution particulière  $X_0$  de  $(S)$ .

### Conséquence

Si  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  forment une base de  $\mathcal{S}_H$  la solution générale de  $(S)$  s'écrit donc :

$X : t \mapsto X_0(t) + \lambda_1 Z_1(t) + \lambda_2 Z_2(t) + \dots + \lambda_n Z_n(t)$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ .

**Proposition** (Principe de superposition des solutions)

On suppose que le “second membre”  $B(t)$  de  $(S)$  s'écrit  $B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \dots + \alpha_k B_k(t)$ , où les applications  $B_1, \dots, B_k$  sont continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}^n$ , et où les  $\alpha_j$  sont dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose en outre que les applications  $X_j : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  sont des solutions particulières du système  $(S_j) : X' = A(t)X + B_j(t)$ .

Alors l'application  $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$  est une solution particulière de  $(S)$  sur  $I$ .

## I.2 Systèmes homogènes à coefficients constants

Si l'application matricielle  $t \mapsto A(t)$  est constante, on dit que le système différentiel homogène  $(H)$  est à coefficients constants.

Si on note  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , et si  $A$  est la matrice de terme général  $a_{ij}$ , alors le système homogène  $(H)$  s'écrit :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x'_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1j} x_j(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2j} x_j(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_i(t) = a_{i1} x_1(t) + a_{i2} x_2(t) + \dots + a_{ij} x_j(t) + \dots + a_{in} x_n(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_n(t) = a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nj} x_j(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

### Utilisation de la réduction de la matrice

#### – Cas où la matrice du système est diagonalisable

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Il existe donc une matrice diagonale  $D$  (de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ) et une matrice  $P$  de  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

On effectue le changement de fonction inconnue défini par  $X(t) = PY(t)$ .

Le système  $(H)$  devient alors :

$$(H') : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La  $k$ -ème ligne  $(L'_k)$  de  $(H')$  s'écrit  $y'_k(t) = \lambda_k y_k(t)$  : c'est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 dont la solution générale est  $y_k(t) = \alpha_k \exp(\lambda_k t)$ , avec  $\alpha_k$  dans  $\mathbb{K}$ .

On trouve alors la solution générale de  $(H)$  en revenant à  $X = PY$ .

Si on note  $u_1, \dots, u_n$  les vecteurs colonnes de  $P$  (qui sont vecteurs propres de  $A$  pour les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ), la solution générale de  $(H)$  s'écrit :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) u_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) u_2 + \dots + \alpha_n \exp(\lambda_n t) u_n$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est un élément quelconque de  $\mathbb{K}^n$ .

On voit bien que  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , et qu'une base de cet espace vectoriel est formée des applications  $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$ , où  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ , pour les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Remarque : Pour résoudre  $(H)$ , le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas nécessaire.



### – Diagonalisation dans $\mathbb{C}$ , pour un système réel

On suppose ici que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (sans l'être dans  $\mathbb{R}$ ) on peut résoudre  $(S)$  en utilisant la diagonalisation de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

Avec les notations précédentes, on range les valeurs propres de  $A$  pour que  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ,  $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$ ,  $\lambda_{2p} = \lambda_{2p-1}$  (valeurs propres non réelles), avec les vecteurs propres  $u_2 = \overline{u_1}, \dots, u_{2p} = \overline{u_{2p-1}}$ , puis  $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n$  (valeurs propres réelles).

A partir de la base de  $\mathcal{S}_H$  formée des applications  $t \mapsto \varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) u_k$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) on construit une base de solutions réelles de  $(H)$  de la manière suivante :

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$ , on remplace  $\varphi_{2k}$  et  $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$  par  $\operatorname{Re}(\varphi_{2k})$  et par  $\operatorname{Im}(\varphi_{2k})$ .

Pour tout  $k > p$ , on conserve les applications  $\varphi_k$  car elles sont à valeurs réelles.

### – Utilisation de la trigonalisation (complément)

On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La matrice  $A$  est (au besoin dans  $\mathbb{C}$ ) trigonalisable.

Il existe deux matrices,  $P$  inversible, et  $T$  triangulaire supérieure, (de coefficients diagonaux les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$ ) telles que  $T = P^{-1}AP$ .

Les systèmes  $(S)$  et  $(H)$  deviennent, en posant encore  $X = PY$ , et  $C(t) = P^{-1}B(t)$  :

$(S')$  :  $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$ , et  $(H)$  :  $Y'(t) = TY(t)$ .

La  $n$ -ième ligne  $(L'_n)$  de  $(S')$  est :  $y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + c_n(t)$ .

La solution générale de  $(L'_n)$  s'écrit  $y_n(t) = \alpha \exp(\lambda_n t) + \beta_n(t)$  (où  $\alpha$  est dans  $\mathbb{K}$  et où  $\beta$  est une solution particulière de  $(L'_n)$ ).

On résout alors progressivement  $(E')$  de la dernière équation à la première.

On obtient enfin la solution générale de  $(E)$  en revenant à  $X = PY$ .

Remarque : là encore, le calcul de  $P^{-1}$  est inutile pour résoudre  $(H)$ .

## I.3 Exponentielles de matrices (compléments)

### Définition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

L'exponentielle de  $A$  est la limite, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de la suite de terme général  $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k$ .

On note  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

### Remarques et propriétés

– Pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ ,  $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda) I_n$ . En particulier  $\exp(0_n) = I_n$ .

– Si  $A, B$  commutent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

– En particulier, pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A)$  est une matrice carrée inversible et  $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$ .

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ , et  $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$ .

– Si  $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , alors  $\exp(A) = \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$ .



- L'application  $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$  est dérivable, et  $f'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A$ .
- Supposons que  $A$  s'écrive  $A = D + N$ , avec  $D$  diagonale,  $N$  strictement triangulaire, et telles que  $ND = DN$ . Une telle décomposition apparaît quand on trigonalise  $A$ .

Soit  $r$  un entier tel que  $N^r = 0$ .

$$\text{Alors } \exp(A) = \exp(D) \exp(N) = \exp(D) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}.$$

### Utilisation de $\exp(tA)$ dans la résolution de $(H)$

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère le système linéaire  $(H) : X'(t) = AX(t)$ .

Soit  $t_0$  un réel, et  $X_0$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ .

L'unique solution de  $(H)$  qui vaut  $X_0$  au point  $t_0$  est :  $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$ .

## II “Equa diffs” linéaires scalaires d’ordre 1

### II.1 Définitions

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point.

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On dit que  $x : I \rightarrow \mathbb{K}$  est solution de l’équation différentielle linéaire scalaire d’ordre 1

$$(E) : x' = a(t)x + b(t)$$

si l’application  $x$  est dérivable sur  $I$  et si, pour tout  $t$  de  $I$ , on a :  $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ .

L’équation  $(H) : x' = a(t)x$  est appelée équation linéaire homogène associée.

Le cas d’une équation différentielle  $a(t)x' + b(t)x + c(t) = 0$  se ramène au cas précédent, si on se place sur un intervalle sur lequel la fonction  $a$  ne s’annule pas.

### II.2 Solution générale de l’équation (E)

- Le problème de Cauchy pour  $(E)$  admet une solution unique sur  $I$ .  
Autrement dit il existe une solution unique  $t \mapsto x(t)$  sur  $I$  telle que  $x(t_0) = x_0$ , avec  $t_0$  donné dans  $I$  et  $x_0$  donné dans  $\mathbb{K}$ .
- La solution générale de l’équation  $(E)$  s’écrit comme la somme d’une solution particulière de  $(E)$  et de la solution générale de l’équation homogène  $(H)$ .
- L’ensemble des solutions de  $(H)$  est une droite vectorielle qui est engendrée par l’application  $t \mapsto \exp(A(t))$ , où  $t \mapsto A(t)$  est une primitive quelconque de  $t \mapsto a(t)$ .
- L’unique solution de  $(H)$  qui vaut  $x_0$  en  $t_0$  est  $x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^t a(t) dt$ .
- Quand l’équation homogène est écrite sous la forme  $a(t)x' + b(t)x = 0$ , et à condition de se placer sur un intervalle sur lequel  $t \mapsto a(t)$  ne s’annule pas, alors la solution générale de  $(H)$  est  $x \mapsto \lambda \exp A(t)$ , où  $A$  est une primitive de  $-\frac{b}{a}$  et où  $\lambda$  est un élément quelconque de  $\mathbb{K}$ .

### II.3 Méthode de variation de la constante

- Soit  $t \mapsto h(t)$  une solution non nulle de l’équation  $(H)$ .  
Rappelons qu’une telle solution ne s’annule en aucun point de  $I$  (problème de Cauchy).
- On cherche des solutions de  $(E)$  sous la forme  $t \mapsto x(t) = \lambda(t)h(t)$ , où  $\lambda$  est dérivable.  
Dire qu’une telle fonction  $x$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  équivaut à :  $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) = b(t)$ .
- Si  $t \mapsto \mu(t)$  est une primitive de l’application  $t \mapsto \frac{b(t)}{h(t)}$ , on en déduit  $\lambda(t) = \mu(t) + \alpha$ .  
On trouve des solutions de  $(E)$  sur  $I$  en écrivant :  $x(t) = (\mu(t) + \alpha)h(t) = \mu(t)h(t) + \alpha h(t)$ .
- Dans cette écriture,  $\mu h$  est une solution particulière de  $(E)$ , correspondant au cas  $\alpha = 0$ , et  $\alpha h$  est la solution générale de  $(H)$ . On obtient donc ainsi toutes les solutions de  $(E)$  sur  $I$ .



## III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

### III.1 Définitions

- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
Soient  $a, b, c$  trois applications continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
On note  $x : t \mapsto x(t)$  la fonction inconnue, à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .
- On considère ici les équations :  
 $(E) : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$ , et  $(H) : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ .  
 $(E)$  est appelée une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.  
On dit que  $(H)$  est l'équation linéaire homogène associée à  $(E)$ .
- Les solutions de  $(E)$  et  $(H)$  sont nécessairement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .

### III.2 Réduction à un système linéaire d'ordre 1

- Soit  $t \mapsto x(t)$  une application définie sur  $I$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  
On lui associe l'application  $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ .
- Alors l'équation  $(E)$  équivaut au système :

$$(S) : \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

qui est du type  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ .

De même l'équation  $(H)$  équivaut au système homogène  $(S_H) : X'(t) = AX(t)$ .

### III.3 Problème de Cauchy

#### Proposition

- || Soit  $(t_0, x_0, m)$  un triplet quelconque de  $I \times \mathbb{K}$ .
- || L'équation  $(E)$  possède une solution et une seule qui vérifie  $x(t_0) = x_0$  et  $x'(t_0) = m$ .
- || L'intervalle de définition de cette solution est  $I$  tout entier.

#### Interprétation

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il existe donc une unique "courbe intégrale" qui passe par le point  $(x_0, y_0)$  avec une tangente de coefficient directeur  $m$ , et cette courbe intégrale est "définie" sur tout  $I$ .

### III.4 Structure de l'ensemble des solutions. Wronskien

#### Proposition

- || Pour tout  $t_0$  de  $I$ , l'application  $h \mapsto (h(t_0), h'(t_0))$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(H)$  sur  $\mathbb{K}^2$ .
- || L'ensemble des solutions de  $(H)$  est donc un plan vectoriel, inclus dans  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ .

**Définition**

Soient  $h$  et  $k$  deux solutions de  $(H)$ .

Le *wronskien* de  $h$  et  $k$  est l'application  $W$  définie sur  $I$  par :  $\forall t \in I, W(t) = \begin{vmatrix} h(t) & k(t) \\ h'(t) & k'(t) \end{vmatrix}$ .

**Proposition**

Deux solutions  $h, k$  de  $(H)$  forment une base de  $\mathcal{S}(H)$  si et seulement si leur wronskien  $W(t)$  est non nul en un point : il est alors non nul en tout point.

**Remarques**

- Comme d'habitude, la solution générale de l'équation  $(E)$  s'obtient en ajoutant la solution générale de  $(H)$  à une solution particulière de  $(E)$ .
- Si  $h, k$  est une base de solutions de  $(H)$ , et si  $y_0$  est une solution particulière de  $(E)$ , la solution générale de  $(E)$  s'écrit donc :  $y(t) \equiv y_0(t) + \lambda h(t) + \mu k(t)$ .

**III.5 Méthode de variation des constantes****Proposition**

Soit  $h, k$  une base de solutions de l'équation homogène  $(H)$ .

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Alors il existe un unique couple  $(\lambda, \mu)$  d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} k(t) \\ k'(t) \end{pmatrix}.$$

Le couple  $(\lambda, \mu)$  vérifie :  $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$ .

- La méthode de variation des constantes consiste à chercher la solution générale  $x(t)$  de  $(E)$ , à partir d'un système fondamental  $h, k$  de solutions de  $(H)$ , en cherchant  $x(t)$  sous la forme suivante :  $\forall t \in I, x(t) = \lambda(t)h(t) + \mu(t)k(t)$ ,  
et avec la condition supplémentaire :  $\forall t \in I, \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0$ .
- Quand on exprime qu'une telle fonction  $x$  est solution de  $(E)$ , on est conduit au système :
$$\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)h'(t) + \mu'(t)k'(t) = c(t) \\ \lambda'(t)h(t) + \mu'(t)k(t) = 0 \end{cases}$$
- Pour tout  $t$  de  $I$ , ce système possède une solution unique  $(\lambda'(t), \mu'(t))$ .  
Il ne reste plus qu'à primitiver  $\lambda'(t)$  et  $\mu'(t)$ , pour obtenir la solution générale de  $(E)$ .

**III.6 Cas où on connaît une solution de  $(H)$** 

- Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une base de solutions de  $(H)$  (sauf cas particulier). Mais supposons connue une solution  $h$  de  $(H)$ , ne s'annulant pas sur un sous-intervalle  $J$  de  $I$ .  
On peut alors chercher les solutions  $t \mapsto x(t)$  de  $(E)$  sur  $J$ , en effectuant le changement de fonction inconnue définie par :  $x(t) = h(t)y(t)$ .





- Avec ces notations, la fonction  $x$  est solution de  $(E)$  sur l'intervalle  $J$  si et seulement si, pour tout  $t$  de  $J$  :

$$y''(t) + \left(2\frac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\right) y'(t) = \frac{c(t)}{h(t)}$$

Le changement  $z = y'(t)$  ramène alors à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

### III.7 Utilisation de séries entières

- Dans certains cas, on cherche une solution de  $(E)$  (ou de  $(H)$ ) qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine.
- Pour que cela soit possible, il faut que les coefficients  $a(t), b(t), c(t)$  de l'équation soient eux-mêmes développables en série entière.  
Un cas fréquent est celui où  $a(t), b(t), c(t)$  sont des polynômes.
- On injecte alors dans  $(E)$  le développement de  $x(t)$ , dont on suppose à priori que le rayon de convergence  $R$  est strictement positif, les coefficients  $a_n$  étant indéterminés.  
On regroupe les termes par degrés, et on identifie.  
Cette identification permet de le plus souvent de trouver des relations de récurrence entre les coefficients  $a_n$  et de les calculer (éventuellement en fonction d'un ou de deux d'entre eux, par exemple  $a_0$  ou  $a_1$ , qui resteraient alors indéterminés).  
On vérifie enfin que le rayon de convergence est strictement positif.
- Si possible, on exprime cette série entière à l'aide de fonctions élémentaires.

### III.8 Cas des équations à coefficients constants

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{K}$ .

Soit  $t \mapsto c(t)$  une application continue, de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

On considère ici les équations différentielles  $\begin{cases} (E) : x'' + ax' + bx = c(t) \\ (H) : x'' + ax' + bx = 0 \end{cases}$

Le système linéaire associé à  $(E)$  s'écrit

$$(S) \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est :  $\chi = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$ .

L'équation  $(C) : a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  est appelée *équation caractéristique* de  $(E)$  et de  $(H)$ .

#### Résolution de $(H)$

- **Résolution de  $(H)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

Notons  $\Delta = a^2 - 4b$  le discriminant de  $(C)$ .

- ◇ Si  $\Delta \neq 0$  :  $(C)$  a deux solutions distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Une base de solutions de  $(H)$  est  $t \mapsto \exp(\lambda_1 t)$ ,  $t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$ .

- ◇ Si  $\Delta = 0$  :  $(C)$  a une solution double  $\lambda$ .

Une base de solutions de  $(H)$  est :  $t \mapsto \exp(\lambda t)$  et  $t \mapsto t \exp(\lambda t)$ .



– **Résolution de (H) si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

- ◇ Si  $\Delta = 0$  voir ci-dessus.
- ◇ Si  $\Delta > 0$  voir le cas  $\Delta \neq 0$  ci-dessus.
- ◇ Si  $\Delta < 0$  : (C) a deux solutions non réelles  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  (avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).  
Une base de solutions de (H) est :  $t \mapsto \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ , et  $t \mapsto \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

– **Cas d'un second membre du type  $\exp(\alpha t)P(t)$**

Soient  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{K}$ , et  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On considère l'équation (E) :  $x'' + ax' + bx = \exp(\alpha t)P(t)$ ,

- ◇ Si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique (C) :  
(E) a une unique solution  $\exp(\alpha t)Q(t)$ , où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$ .
- ◇ Si  $\alpha$  est racine simple de l'équation caractéristique (C) :  
(E) a une unique solution  $\exp(\alpha t)tQ(t)$ , où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$ .
- ◇ Si  $\alpha$  est racine double de l'équation caractéristique (C) :  
(E) a une unique solution  $\exp(\alpha t)t^2Q(t)$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$ .