V Accroissements finis et formules de Taylor

V.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans E , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que pour tout x de $]a, b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$.

Cas particulier

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$, avec $M = \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|$.

Remarques

- L'inégalité des accroissements finis reste valable si f est seulement supposée continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a, b[$.
- Attention ! Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs réelles.

Par exemple, l'application $f : t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et elle vérifie $f(0) = f(1)$.

Pourtant sa dérivée $f' : t \mapsto i \exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0, 2\pi[$.

Proposition (Caractérisation des applications lipschitziennes)

Soit f une application continue de I dans E , dérivable sur l'intérieur de I .
 f est k -lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I , $\|f'(x)\| \leq k$.

Proposition (Prolongement d'une application dérivable)

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans E , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que f' possède dans E une limite ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $f'(a) = \ell$.

Remarque

On obtient un résultat analogue au point b de $[a, b]$.

Plus généralement, si f est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$, et si pour tout $k \leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.

V.2 Formules de Taylor

Proposition (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \rightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I .

Soit a un point de I . Alors pour tout x de I , $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

R_n est appelé le *reste d'ordre n* de la formule de Taylor de f au point a .

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : I \rightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Soient a et b deux points de I .

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } M = \sup_{[a,b]} \|f^{n+1}\|.$$

Remarques

– Si $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

– En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } M = \sup_{[a,a+h]} \|f^{n+1}\|.$$

V.3 Application aux développements limités

Définition

Soit f une application de I dans E . Soient x_0 un point de I et n un entier naturel.

On dit que f possède un *développement limité* (un *DL*) d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0, a_1, \dots, a_n$ de E , et une application ε de I dans E tels que, pour tout x de I :

$$f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \dots + (x-x_0)^n a_n + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarques et propriétés

– On note souvent $o(x-x_0)^n$ plutôt que $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$.

– Si f possède un *DL* d'ordre n en x_0 , les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont uniques.

– Si f a un *DL* d'ordre n en x_0 , elle a un *DL* en x_0 à tout ordre $p \leq n$, par *troncature*.

– f admet un *DL* d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0 .

Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + o(1)$.

– f admet un *DL* d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0 .

Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + o(x-x_0)$.

- f possède un DL d'ordre n en $x_0 \Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un DL d'ordre n en 0 , et avec les mêmes coefficients.

Cette propriété permet de ramener tous les DL à l'origine.

Proposition (*DL obtenu par primitivation d'une application continue*)

Soit g une application continue de I dans E , admettant un DL d'ordre n en x_0 :

$$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2a_2 + \cdots + (x - x_0)^na_n + o(x - x_0)^n.$$

Alors toute primitive f de g admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

Remarques

- On remarque que le DL de f est obtenu par intégration terme à terme de celui de g .
- La propriété précédente est vraie notamment si f est de classe $\mathcal{C}^1$: L'existence d'un DL d'ordre n pour f' prouve l'existence d'un DL d'ordre $n + 1$ pour sa primitive f .
- Dans un DL obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

Proposition (*Formule de Taylor-Young*)

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E .

Soit x_0 un point de I . Alors f possède un DL d'ordre n en x_0 , sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n.$$