# V Accroissements finis et formules de Taylor

## V.1 Inégalité des accroissements finis

**Proposition**

Soit $f$ une application continue de $[a,b]$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que pour tout $x$ de $]a,b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$.

**Cas particulier**

On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$, avec $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$.

**Remarques**

- L'inégalité des accroissements finis reste valable si $f$ est seulement supposée continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.
- Attention ! Le théorème de Rolle et l'*égalité* des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs *réelles*.

  Par exemple, l'application $f : t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$ et elle vérifie $f(0)=f(1)$.

  Pourtant sa dérivée $f' : t \mapsto i\exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0,2\pi[$.

**Proposition** *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $E$, dérivable sur l'intérieur de $I$.
$f$ est $k$-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout $x$ de $I$, $\|f'(x)\| \leq k$.

**Proposition** *(Prolongement d'une application dérivable)*

Soit $f$ une application continue de $[a,b]$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que $f'$ possède dans $E$ une limite $\ell$ en $a$ à droite.
Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $f'(a)=\ell$.

**Remarque**

On obtient un résultat analogue au point $b$ de $[a,b]$.

Plus généralement, si $f$ est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$, et si pour tout $k \leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

## V.2 Formules de Taylor

**Proposition** *(Formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f:\ I\to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur $I$.
Soit $a$ un point de $I$. Alors pour tout $x$ de $I$, $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ avec :

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a),\quad \text{et}\quad R_n(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

$R_n$ est appelé le *reste d'ordre* $n$ de la formule de Taylor de $f$ au point $a$.

**Proposition** *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f:\ I\to E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient $a$ et $b$ deux points de $I$.

Alors : $\displaystyle\left\|f(b)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\|\le M\,\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $\displaystyle M=\sup_{[a,b]}\left\|f^{n+1}\right\|$.

### Remarques

- Si $n=0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- En posant $h=b-a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n$ s'écrit :

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\|\le M\,\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{où } M=\sup_{[a,a+h]}\left\|f^{n+1}\right\|.$$

## V.3 Application aux développements limités

**Définition**

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$. Soient $x_0$ un point de $I$ et $n$ un entier naturel.
On dit que $f$ possède un *développement limité* (un *DL*) d'ordre $n$ en $x_0$ s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0,a_1,\ldots,a_n$ de $E$, et une application $\varepsilon$ de $I$ dans $E$ tels que, pour tout $x$ de $I$ :
$f(x)=a_0+(x-x_0)a_1+\cdots+(x-x_0)^na_n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

### Remarques et propriétés

- On note souvent $\mathrm{o}(x-x_0)^n$ plutôt que $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$.
- Si $f$ possède un *DL* d'ordre $n$ en $x_0$, les coefficients $a_0,a_1,\ldots,a_n$ sont uniques.
- Si $f$ a un *DL* d'ordre $n$ en $x_0$, elle a un *DL* en $x_0$ à tout ordre $p\le n$, par *troncature*.
- $f$ admet un *DL* d'ordre 0 en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ est continue en $x_0$.
  Ce *DL* s'écrit $f(x)=f(x_0)+\mathrm{o}(1)$.
- $f$ admet un *DL* d'ordre 1 en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ est dérivable en $x_0$.
  Ce *DL* s'écrit $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\mathrm{o}(x-x_0)$.

– $f$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0 \Leftrightarrow$ l'application $g$ définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en 0, et avec les mêmes coefficients.

Cette propriété permet de ramener tous les $DL$ à l'origine.

**Proposition** *(DL obtenu par primitivation d'une application continue)*

Soit $g$ une application continue de $I$ dans $E$, admettant un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0$ :
$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + \mathrm{o}(x - x_0)^n$.
Alors toute primitive $f$ de $g$ admet un $DL$ d'ordre $n + 1$ en $x_0$ :
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \dfrac{1}{2}(x - x_0)^2 a_1 + \cdots + \dfrac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \mathrm{o}(x - x_0)^{n+1}$.

**Remarques**

– On remarque que le $DL$ de $f$ est obtenu par intégration terme à terme de celui de $g$.

– La propriété précédente est vraie notamment si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ : L'existence d'un $DL$ d'ordre $n$ pour $f'$ prouve l'existence d'un $DL$ d'ordre $n + 1$ pour sa primitive $f$.

– Dans un $DL$ obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

**Proposition** *(Formule de Taylor-Young)*

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $I$ dans $E$.
Soit $x_0$ un point de $I$. Alors $f$ possède un $DL$ d'ordre $n$ en $x_0$, sous la forme :
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \dfrac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)^n$.