V Accroissements finis et formules de Taylor

V.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que pour tout x de $]a,b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$.

Cas particulier

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$, avec $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$.

Remarques

– L'inégalité des accroissements finis reste valable si f est seulement supposée continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.
– Attention ! Le théorème de Rolle et l'*égalité* des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs *réelles*.

  Par exemple, l'application $f : t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$ et elle vérifie $f(0)=f(1)$.

  Pourtant sa dérivée $f' : t \mapsto i\exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0,2\pi[$.

Proposition *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit f une application continue de I dans E, dérivable sur l'intérieur de I.
f est k-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I, $\|f'(x)\| \leq k$.

Proposition *(Prolongement d'une application dérivable)*

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que f' possède dans E une limite ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $f'(a)=\ell$.

Remarque

On obtient un résultat analogue au point b de $[a,b]$.

Plus généralement, si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$, et si pour tout $k\leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

V.2 Formules de Taylor

Proposition *(Formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f: I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I.
Soit a un point de I. Alors pour tout x de I, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

R_n est appelé le *reste d'ordre* n de la formule de Taylor de f au point a.

Proposition *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f: I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient a et b deux points de I.

Alors : $\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $M = \sup_{[a,b]} \left\| f^{n+1} \right\|$.

Remarques

- Si $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M = \sup_{[a,a+h]} \left\| f^{n+1} \right\|.$$

V.3 Application aux développements limités

Définition

Soit f une application de I dans E. Soient x_0 un point de I et n un entier naturel.
On dit que f possède un *développement limité* (un *DL*) d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de E, et une application ε de I dans E tels que, pour tout x de I :
$f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \cdots + (x-x_0)^n a_n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques et propriétés

- On note souvent $\mathrm{o}(x-x_0)^n$ plutôt que $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$.
- Si f possède un *DL* d'ordre n en x_0, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques.
- Si f a un *DL* d'ordre n en x_0, elle a un *DL* en x_0 à tout ordre $p \leq n$, par *troncature*.
- f admet un *DL* d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0.
  Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.
- f admet un *DL* d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0.
  Ce *DL* s'écrit $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \mathrm{o}(x-x_0)$.

– f possède un DL d'ordre n en $x_0 \Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un DL d'ordre n en 0, et avec les mêmes coefficients.

Cette propriété permet de ramener tous les DL à l'origine.

Proposition *(DL obtenu par primitivation d'une application continue)*

Soit g une application continue de I dans E, admettant un DL d'ordre n en x_0 :
$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + \mathrm{o}(x - x_0)^n$.
Alors toute primitive f de g admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \mathrm{o}(x - x_0)^{n+1}.$$

Remarques

– On remarque que le DL de f est obtenu par intégration terme à terme de celui de g.

– La propriété précédente est vraie notamment si f est de classe $\mathcal{C}^1$: L'existence d'un DL d'ordre n pour f' prouve l'existence d'un DL d'ordre $n + 1$ pour sa primitive f.

– Dans un DL obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

Proposition *(Formule de Taylor-Young)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E.
Soit x_0 un point de I. Alors f possède un DL d'ordre n en x_0, sous la forme :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)^n.$$