IV Primitives et intégrales

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

IV.1 Primitives

Définition

Soit f une application continue de I dans E.

On dit qu'une application $F : I \to E$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Extension de la définition

On suppose seulement que $f : I \to E$ est continue par morceaux.

Une primitive de f est alors toute application $F : I \to E$, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f.

Propriétés

- Soit f une application continue par morceaux de I dans E admettant une primitive F.

  Soit G une application de I dans E. G est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante λ telle que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Dans ces conditions, si x_0 est un point de I et si u_0 est un élément quelconque de E, il existe une unique primitive G de f qui prend la valeur u_0 et x_0.
  Cette primitive est donnée par : $G = F - F(x_0) + u_0$.

Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application f continue par morceaux sur un intervale I y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

IV.2 Le théorème fondamental

Théorème

Si f est continue par morceaux de I dans E, elle y admet des primitives.

Celle qui s'annule en en un point a de I est l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Pour toute primitive G de f , et pour tous points a, x de I, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

Conséquence

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, alors : $\forall (a, x) \in I^2, \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

Proposition *(Intégrale fonction de ses bornes)*

Soit f une application continue de I dans E. Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs rélles, et telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

L'application G de J dans E définie par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

IV.3 Calcul des intégrales

Proposition *(Intégrales des fonctions paires ou impaires)*

On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à 0.

Soit f une application définie sur I, à valeurs dans E, continue par morceaux.

- Si f est paire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 2\int_0^a f$.
- Si f est impaire alors : $\forall a \in I, \displaystyle\int_{-a}^{a} = 0$

Proposition *(Intégrales des fonctions périodiques)*

Soit $f : I \to E$ une application continue par morceaux et T-périodique.

- Pour tous réels a et b, pour tout entier relatif k $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_a^b f$.
- Pour tous réels a et b, $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$.

Proposition *(Intégration par parties)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors $\displaystyle\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$.

Remarques

- On utilise bien sûr la notation $[h]_a^b = h(b) - h(a)$.
- Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'autre dans E.

Proposition *(Intégrations par parties répétées)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

$$\int_a^b fg^{(n)} = \left[fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g'\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g.$$

Proposition *(Changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

Soit φ une application de J dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points a et b de J : $\displaystyle\int_a^b \varphi'(f \circ \varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

Remarques

– Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :
  $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, où $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

  Pour l'utiliser on applique mécaniquement : $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

  Dans un sens, le passage de a, b à c, d est univoque.

  Dans l'autre sens, il faut trouver a, b dans J tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, ce qui est possible de manière unique si φ est bijective de I sur J.
– La formule s'étend au cas où f est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que φ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

IV.4 Le théorème du relèvement

Proposition

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$.

L'application $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est un *homéomorphisme* de $]-\pi, +\pi[$ sur $U - \{-l\}$, c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée *Arg* et appelée fonction *argument*.

Pour tout $z = x + iy$ de U, avec $z \neq 1$, $Arg(z) = 2\arctan\dfrac{y}{1+x}$.

Théorème

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans U, avec $n \geq 1$.

Alors il existe une application θ de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, telle que pour tout x de I : $f(x) = \exp(i\theta(x))$. On dit que l'application θ est un *relèvement* de f.

Remarques

– Avec les notations précédentes, θ n'est pas le seul relèvement de f.

  En effet, pour tout entier relatif k, l'application $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$ convient encore.