III Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

III.1 Fonctions en escaliers

Définition *(Subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Remarque

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ'.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'.

Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ', alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

Définition *(Applications en escaliers)*

Soit f une application de $[a, b]$ dans E. On dit que f est *en escaliers* s'il existe :
– Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$,
– n vecteurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de E,
tels que : $\forall k = 0, \ldots, n-1, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f.

Remarques et notations

- Si σ est une subdivision adaptée à f, toute subvision plus fine que σ est adaptée à f.
- On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
- Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
- Tout combinaison linéaire de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

  $\mathcal{E}([a, b], E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$.
- Si E est une algèbre, notamment si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a, b], E)$: le produit de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

III.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition

Soient $f : I \to E$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)u_k$ est appelé *intégrale* de f et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Propriétés

– L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision adaptée á f choisie.

– Si f est constante égale à u sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (b - a)u$.

– Si l'application f est nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points,alors elle est élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.

– L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{E}([a, b], E)$ dans E.

– Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est également en escaliers.
De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.

– Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$ et si c est un élément de $]a, b[$, alors les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

– Soit f un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et u une application linéaire de E dans F.
Alors $u \circ f$ est en escaliers de $[a, b]$ dans F et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

Cas des applications à valeurs réelles

– Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.

– Si f, g appartiennent à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

Remarque

Si f est en escaliers de $[a, b]$ dans E, alors $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq (b - a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Notation

On note $\mathcal{M}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, b]$.
C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b], E)$ des applications bornées sur E.

Proposition et définition *(Intégrale sur $\mathcal{M}([a,b],E)$)*

Soit f un élément de $\mathcal{M}([a,b],E)$.

On sait qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers l'application f.

Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente dans E.

On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$. Cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a,b]$

Remarques

- La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite (φ_n) de fonctions en escaliers utilisée pour approcher f.
- Elle ne dépend pas non plus de la norme choisie sur E (on rappelle que E est supposé être de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.)
- Si l'application f est en escaliers sur $[a,b]$ elle est continue par morceaux.
  L'intégrale de f est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si f est à valeurs réelles, la suite (φ_n) peut être choisie telle que pour tout n, $\varphi_n \le f$ sur $[a,b]$ (ou telle que pour tout n, $\varphi_n \ge f$ sur $[a,b]$.)
  Si f est à valeurs réelles positives, la suite (φ_n) peut être choisie telle que les φ_n soient elles aussi à valeurs positives sur $[a,b]$.

Proposition *(Invariance de l'intégrale par translation)*

Soit f une application de $I=[a,b]$ dans E, continue par morceaux.

Soit α un nombre réel.

On définit l'application g de $J=[a+\alpha,b+\alpha]$ dans E par $g(t)=f(t-\alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Elles découlent de celles de $\mathcal{E}([a,b],E)$ par passage à la limite.

- **Linéarité**
  L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{M}([a,b],E)$ dans E.
- **Extension aux applications définies "presque partout"**
  Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.
  En particulier si f est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$, et si la restriction de f à chaque $]x_k,x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité

à $[x_k, x_{k+1}]$ alors on peut encore définir l'intégrale de f, en donnant éventuellement à f une valeur quelconque en chacun des x_k.

- **Composition par une application linéaire**
  Soit $f : [a,b] \to E$, continue par morceaux. Soit u une application linéaire de E dans F.
  L'application $u \circ f$ appartient à $\mathcal{M}([a,b], F)$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\Big(\int_{[a,b]} f\Big)$.
- **Intégrale et composantes dans une base**
  Soit f une application de $[a,b]$ dans E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
  On note $f_1, \ldots, f_n$ ses composantes : $\forall x \in [a,b], f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, e_k$.
  f est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ les composantes f_k sont continues par morceaux.
  Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{[a,b]} f_k\Big)\, e_k$.
  En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et si $f = g + ih$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g + i \int_{[a,b]} h$.
  Autrement dit : $\displaystyle\mathrm{Re}\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f$, et $\displaystyle\mathrm{Im}\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$
- **Intégrale de la norme**
  Si f appartient à $\mathcal{M}([a,b], E)$, alors l'application $\|f\|$, à valeurs réelles et définie sur $[a,b]$ par $t \mapsto \|f(t)\|$, est également continue par morceaux.
  De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\Big\|\int_{[a,b]} f\Big\| \le \int_{[a,b]} \|f\|$.

III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles

On rappelle que le segment $[a,b]$ est tel que $a < b$.

Proposition *(Positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
- Si $f \ge 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge 0$.
- Si $f \ge g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \ge \int_{[a,b]} g$.
- On suppose que f garde un signe constant sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
  - ⋄ Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$, alors $f(x_0) = 0$.
  - ⋄ En particulier, si f est continue sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle.

Remarques

– Le résultat précédent peut s'énoncer, en supposant $f \geq 0$ sur $[a,b]$:
 Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$ et si $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$. En particulier, si f est continue ≥ 0 mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

– Si f et g sont continues, si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et si $f \neq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

Proposition *(Inégalité de la moyenne)*

Soit f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.
Alors $\left\|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right\| \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

III.6 Extension de la définition et notation définitive

Notation

Soit f une application continue par morceaux de I dans E.
Pour tous points a, b de I, on note :
Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$; Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$; Si $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Remarques

– On dispose maintenant de la notation $\displaystyle\int_a^b f$, pour deux points quelconques a et b d'un intervalle I sur lequel f est continue par morceaux. On vérifie que $\forall (a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.
– Les propriétés précédentes, relatives à la linéarité ou aux composantes, restent valables.
– En revanche, les propriétés relatives à la positivité et à la croissance dépendent de la position respective des bornes de l'intégrale.
– L'inégalité de la moyenne devient : $\forall (a,b) \in I^2$, $\left\|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right\| \leq |b-a|\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.
– Si f est continue par morceaux sur I, à valeurs dans E, et si a, b, c sont trois points quelconques de $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(Relation de Chasles.)*
 On peut généraliser à une suite finie $c_1, \ldots, c_n$ de points de I : $\displaystyle\int_{c_1}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$.

Notation

On note souvent $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ plutôt que $\displaystyle\int_a^b f$. Dans cette notation t est une variable *muette*.

III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soient f et g deux applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Alors pour tous points a et b de I : $\left|\int_a^b f\,\bar{g}\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

En particulier, si f g sont à valeurs réelles : $\left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$, les inégalités précédentes sont des égalités $\Leftrightarrow f$ et g sont proportionnelles sur $[a, b]$.