

III Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $[a, b]$ désigne un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$.

III.1 Fonctions en escaliers

Définition (Subdivisions)

- || On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$.
- || L'ensemble $\{a = x_0, \dots, x_k, \dots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
- || On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Remarque

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ' .

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ' .

Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ' , alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

Définition (Applications en escaliers)

- || Soit f une application de $[a, b]$ dans E . On dit que f est *en escaliers* s'il existe :
 - Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$,
 - n vecteurs u_0, u_1, \dots, u_{n-1} de E ,tels que : $\forall k = 0, \dots, n-1, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
- || On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f .

Remarques et notations

- Si σ est une subdivision adaptée à f , toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f .
- On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
- Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
- Toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.
 $\mathcal{E}([a, b], E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$.
- Si E est une algèbre, notamment si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a, b], E)$: le produit de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

III.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition

Soient $f : I \rightarrow E$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision adaptée. On suppose que : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.

Le vecteur $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)u_k$ est appelé *intégrale* de f et est noté $\int_{[a,b]} f$.

Propriétés

- L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie.
- Si f est constante égale à u sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f = (b-a)u$.
- Si l'application f est nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points, alors elle est élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et $\int_{[a,b]} f = 0$.
- L'application qui à f associe $\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{E}([a, b], E)$ dans E .
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est également en escaliers. De plus on a l'inégalité : $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$ et si c est un élément de $]a, b[$, alors les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escaliers et : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- Soit f un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et u une application linéaire de E dans F . Alors $u \circ f$ est en escaliers de $[a, b]$ dans F et $\int_{[a,b]} u \circ f = u \left(\int_{[a,b]} f \right)$.

Cas des applications à valeurs réelles

- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Si f, g appartiennent à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors : $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

Remarque

Si f est en escaliers de $[a, b]$ dans E , alors $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Notation

On note $\mathcal{M}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, b]$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b], E)$ des applications bornées sur E .

Proposition et définition (*Intégrale sur $\mathcal{M}([a, b], E)$*)

Soit f un élément de $\mathcal{M}([a, b], E)$.

On sait qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers l'application f .

Alors la suite des intégrales $\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente dans E .

On pose $\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$. Cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a, b]$

Remarques

- La valeur de l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite (φ_n) de fonctions en escaliers utilisée pour approcher f .
- Elle ne dépend pas non plus de la norme choisie sur E (on rappelle que E est supposé être de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.)
- Si l'application f est en escaliers sur $[a, b]$ elle est continue par morceaux. L'intégrale de f est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si f est à valeurs réelles, la suite (φ_n) peut être choisie telle que pour tout n , $\varphi_n \leq f$ sur $[a, b]$ (ou telle que pour tout n , $\varphi_n \geq f$ sur $[a, b]$.)
Si f est à valeurs réelles positives, la suite (φ_n) peut être choisie telle que les φ_n soient elles aussi à valeurs positives sur $[a, b]$.

Proposition (*Invariance de l'intégrale par translation*)

Soit f une application de $I = [a, b]$ dans E , continue par morceaux.

Soit α un nombre réel.

On définit l'application g de $J = [a + \alpha, b + \alpha]$ dans E par $g(t) = f(t - \alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J et $\int_J g = \int_I f$.

III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Elles découlent de celles de $\mathcal{E}([a, b], E)$ par passage à la limite.

Linéarité

L'application qui à f associe $\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{M}([a, b], E)$ dans E .

Extension aux applications définies "presque partout"

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est encore continue par morceaux sur $[a, b]$, et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

En particulier si f est définie sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, et si la restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité

à $[x_k, x_{k+1}]$ alors on peut encore définir l'intégrale de f , en donnant éventuellement à f une valeur quelconque en chacun des x_k .

– **Composition par une application linéaire**

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$, continue par morceaux. Soit u une application linéaire de E dans F .

L'application $u \circ f$ appartient à $\mathcal{M}([a, b], F)$, et $\int_{[a,b]} u \circ f = u \left(\int_{[a,b]} f \right)$.

– **Intégrale et composantes dans une base**

Soit f une application de $[a, b]$ dans E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$.

On note f_1, \dots, f_n ses composantes : $\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$.

f est continue par morceaux \Leftrightarrow les composantes f_k sont continues par morceaux.

Dans ces conditions, on a l'égalité : $\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^n \left(\int_{[a,b]} f_k \right) e_k$.

En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et si $f = g + ih$: $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g + i \int_{[a,b]} h$.

Autrement dit : $\operatorname{Re} \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f$, et $\operatorname{Im} \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$

– **Intégrale de la norme**

Si f appartient à $\mathcal{M}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\|$, à valeurs réelles et définie sur $[a, b]$ par $t \mapsto \|f(t)\|$, est également continue par morceaux.

De plus on a l'inégalité : $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.

III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles

On rappelle que le segment $[a, b]$ est tel que $a < b$.

Proposition (*Positivité et croissance de l'intégrale*)

Soient f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

– Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

– Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

– On suppose que f garde un signe constant sur $[a, b]$ et que $\int_{[a,b]} f = 0$.

◊ Si f est continue en un point x_0 de $[a, b]$, alors $f(x_0) = 0$.

◊ En particulier, si f est continue sur $[a, b]$, alors f est identiquement nulle.

Remarques

– Le résultat précédent peut s'énoncer, en supposant $f \geq 0$ sur $[a, b]$:

Si f est continue en un point x_0 de $[a, b]$ et si $f(x) > 0$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$. En particulier, si f est continue ≥ 0 mais non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

– Si f et g sont continues, si $f \leq g$ sur $[a, b]$ et si $f \neq g$, alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

Proposition (Inégalité de la moyenne)

|| Soit f une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans E .

|| Alors $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

III.6 Extension de la définition et notation définitive
Notation

|| Soit f une application continue par morceaux de I dans E .

|| Pour tous points a, b de I , on note :

|| Si $a < b$, $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$; Si $a > b$, $\int_a^b f = - \int_{[b,a]} f$; Si $a = b$, $\int_a^b f = 0$.

Remarques

– On dispose maintenant de la notation $\int_a^b f$, pour deux points quelconques a et b d'un intervalle I sur lequel f est continue par morceaux. On vérifie que $\forall (a, b) \in I^2$, $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

– Les propriétés précédentes, relatives à la linéarité ou aux composantes, restent valables.

– En revanche, les propriétés relatives à la positivité et à la croissance dépendent de la position respective des bornes de l'intégrale.

– L'inégalité de la moyenne devient : $\forall (a, b) \in I^2$, $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq |b - a| \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

– Si f est continue par morceaux sur I , à valeurs dans E , et si a, b, c sont trois points quelconques de $[a, b]$, alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (Relation de Chasles.)

On peut généraliser à une suite finie c_1, \dots, c_n de points de I : $\int_{c_1}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$.

Notation

|| On note souvent $\int_a^b f(t)dt$ plutôt que $\int_a^b f$. Dans cette notation t est une variable muette.

III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soient f et g deux applications continues par morceaux de I dans \mathbb{K} .

Alors pour tous points a et b de I : $\left| \int_a^b f \bar{g} \right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

En particulier, si f et g sont à valeurs réelles : $\left(\int_a^b f g \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$, les inégalités précédentes sont des égalités $\Leftrightarrow f$ et g sont proportionnelles sur $[a, b]$.