# II Applications de classe Ck

On rappelle que I désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés E, F, G sont de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## II.1 Opérations sur les applications de classe C1

Proposition (Linéarité de la dérivation)

 $C^1(I, E)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace C(I, E) des applications continues de I dans E, lui-même un sous-espace de l'espace F(I, E) de toutes les applications I dans E.  $\forall f, g \in C^1(I, E), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ .

Proposition (Composition par une application linéaire)

Soit f une application de I dans E, de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit u une application linéaire de E dans F.

Alors  $u \circ f$  est de classe  $C^1$  de I dans F, et (uof)' = uof'.

Proposition (Composition par une application bilinéaire)

Soit f une application de I dans E, de classe  $C^1$ .

Soit g une application de I dans F, de classe  $C^1$ .

Soit B une application bilinéaire de  $E \times F$  dans G.

Alors l'application h définie par h(x) = B(f(x), g(x)) est de classe  $C^1$  de I dans G.

De plus h' = (B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g').

#### Cas particuliers

– Si E est une algèbre normée, et si f et g sont de classe  $C^1$  de I dans E, alors h = fg est de classe  $C^1$  sur I et h' = f'g + fg'.

Par récurrence, on vérifie alors que si  $f_1, f_2, \ldots, f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I alors  $f = f_1 f_2 \cdots f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I et  $f' = \sum_{k=1}^n f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$ .

Si de plus E est commutative, alors pour tout entier  $p:(f^p)'=p\,f'\,f^{p-1}$ .

Le cas le plus courant est évidemment  $E = \mathbb{I}K$ .

- Soient  $f: I \to E$ , et  $\lambda: I \to \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors  $g = \lambda f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I et  $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$ .
- Si f, g sont de classe  $C^1$  dans I et si E est muni d'un produit scalaire, alors l'application  $\langle f, g \rangle$  est de classe  $C^1$  et  $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ .
- Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si f et g sont de classe  $\mathcal{C}^1$  de I dans E, alors  $f \wedge g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$ .

Page 1 Jean-Michel Ferrard www.klubprepa.net ©EduKlub S.A.

### Proposition (Dérivée de l'inverse)

Soit g une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de I dans  $\mathbb{I}K$ , ne s'annulant pas.

Alors 
$$\frac{1}{g}$$
 est de classe  $C^1$  sur  $I$  et :  $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ .

La formule  $(g^m)' = mg'g^{m-l}$  est alors vraie pour tout entier relatif m.

Si  $f: I \to E$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I et :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

### Proposition (Dérivée d'une fonction composée)

Soit  $\varphi: I \to \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit J un intervalle contenant  $\varphi(I)$  et non réduit à un point.

Soit f une application de classe  $C^1$  de J dans E.

Alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de I dans E et :  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ .

Autrement dit :  $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t)).$ 

## II.2 Dérivées successives

**Définition** (Applications n fois dérivables sur un intervalle)

Soit f une application de I dans E. On pose  $f^{(0)} = f$ .

On suppose que l'application  $f^{(n-1)}$  existe et est dérivable de I dans E.

On définit alors l'application  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

Si l'application  $f^{(n)}: I \to E$  existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et  $f^{(n)}$  est appelée application dérivée n-ième de f sur I.

L'application  $f^{(n)}$  est parfois notée  $D^n f$  ou encore  $\frac{d^n f}{d x^n}$ .

## Remarque (Vecteur dérivé n-ième en un point)

Soit f une application de I dans E, a un point de I et n un entier naturel. On dit que f est n fois dérivable en a si f est n-1 fois dérivable sur un voisinage de a et si  $f^{(n-1)}$  est dérivable en a.

On note encore  $f^{(n)}(a)$  cette dérivée, appelée vecteur dérivé n-ième de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que  $f^{(n)}$  existe sur I tout entier.)

## **Définition** (Applications de classe $C^k$ )

Soit f une application de I dans E, k fois dérivable.

Si de plus l'application  $f^{(k)}$  est continue sur I, on dit que f est de classe  $C^k$  sur I.

On note  $C^k(I, E)$  l'ensemble des applications de classe  $C^k$  de I dans E.

On dit que f est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout k).

On note  $\mathcal{C}^{\infty}(I, E)$  l'ensemble de ces applications.

Page 2 Jean-Michel Ferrard www.klubprepa.net ©EduKlub S.A.

#### Remarque

 $\mathcal{C}^0(I,E)$  désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

On a les inclusions  $C^0(I, E) \supset C^1(I, E) \supset \cdots \supset C^k(I, E) \supset \cdots \supset C^{\infty}(I, E)$ .

De même on a :  $C^{\infty}(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I, E)$ .

## II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

**Proposition** (Combinaisons linéaires d'applications de classe  $C^k$ )

 $\mathcal{C}^k(I,E)$  est un espace vectoriel sur IK.

L'application  $f \mapsto f^{(k)}$  est linéaire de  $\mathcal{C}^k(I, E)$  dans  $\mathcal{C}^0(I, E)$ .

Proposition (Formule de Leibniz)

Soit n un élément de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Soient f et g deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  de I dans  $\mathbb{K}$ .

Alors 
$$fg$$
 est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et :  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

#### Remarques

- Le résultat précédent implique que  $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$  est muni d'une structure d'algèbre.
- "Leibniz" est encore valable si f est à valeurs dans IK et g est à valeurs dans E, ou si f et g sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée E.

**Proposition** (Inverse d'une application de classe  $C^k$ )

 $\parallel \operatorname{Si} f: I \to \operatorname{I\!K}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur I et ne s'annule pas, alors  $\frac{1}{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur I.

**Proposition** (Composition d'applications de classe  $C^k$ )

Soit  $\varphi$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de I dans  $\mathbb{R}$ .

Soit J un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point et contenant  $\varphi(I)$ .

Soit f une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de J dans E.

Alors l'application  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  de I dans E.

## II.4 Difféomorphismes

**Définition** ( $C^k$ -difféomorphismes)

Soient I et J deux intervalles de  ${\rm I\!R},$  non réduits à un point.

On dit qu'une application f de I dans J est un  $C^k$ -difféomorphisme si f est une bijection de I sur J, et si les deux applications f et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^k$ .

**Proposition** (Caractérisation des  $C^k$ -difféomorphismes)

||f| est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I sur  $J=f(I)\Leftrightarrow f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur I et, pour tout x de I,  $f'(x)\neq 0$ .

Page 3 Jean-Michel Ferrard www.klubprepa.net ©EduKlub S.A.

DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Partie II : Applications de classe Ck

## II.5 Applications de classe Ck par morceaux

#### **Définition**

Soit f une application définie sur le segment [a, b], à valeurs dans E.

Soit k un entier naturel. On dit que f est de classe  $C^k$  par morceaux sur [a, b] s'il existe une subdivision  $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$  de [a, b] telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle  $[a_j, a_{j+1}]$  soit de classe  $C^k$  et soit prolongeable en une application de classe  $C^k$  sur  $[a_j, a_{j+1}]$ .

Dans ce cas, on dit que la subdivision  $(a_j)_{0 \le j \le n}$  est adaptée à f.

#### Remarques

- Si f est de de classe  $C^k$  par morceaux sur [a, b] alors ses dérivées successives, encore notées  $f^j$  ou  $D^j(f)$  avec  $1 \le j \le k$ , sont définies sur [a, b] privé d'un nombre fini de points.
- Si I est un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  (et donc plus nécessairement un segment), l'application  $f: I \to E$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur I si f est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur tout sous-segment de I.
- On vérifie que l'ensemble  $\mathcal{M}^k(I, E)$  des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ .

Proposition (Caractérisation des applications constantes)

Soit f une application de I dans E, continue et de classe  $C^k$  par morceaux.

Alors f est constante sur  $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$  sur I.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens ←.)

Page 4 Jean-Michel Ferrard www.klubprepa.net ©EduKlub S.A.