# II Applications de classe Ck

On rappelle que $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés $E, F, G$ sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## II.1 Opérations sur les applications de classe C1

**Proposition** *(Linéarité de la dérivation)*

$\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ des applications continues de $I$ dans $E$, lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$ de toutes les applications $I$ dans $E$.
$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(I, E), \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

**Proposition** *(Composition par une application linéaire)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $F$, et $(uof)' = uof'$.

**Proposition** *(Composition par une application bilinéaire)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $g$ une application de $I$ dans $F$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $B$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$.

Alors l'application $h$ définie par $h(x) = B(f(x), g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $G$.

De plus $h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

**Cas particuliers**

– Si $E$ est une algèbre normée, et si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$, alors $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $h' = f'g + fg'$.

  Par récurrence, on vérifie alors que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ alors $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$.

  Si de plus $E$ est commutative, alors pour tout entier $p$ : $(f^p)' = p\, f'\, f^{p-1}$.

  Le cas le plus courant est évidemment $E = \mathbb{K}$.

– Soient $f : I \to E$, et $\lambda : I \ \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

  Alors $g = \lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

– Si $f$, $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans $I$ et si $E$ est muni d'un produit scalaire, alors l'application $< f, g >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $< f, g >' = < f', g > + < f, g' >$.

– Si $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$, alors $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

**Proposition** *(Dérivée de l'inverse)*

Soit $g$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

La formule $(g^m)' = mg'g^{m-l}$ est alors vraie pour tout entier relatif $m$.

Si $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Proposition** *(Dérivée d'une fonction composée)*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $J$ un intervalle contenant $\varphi(I)$ et non réduit à un point.

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $J$ dans $E$.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $E$ et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Autrement dit : $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

## II.2 Dérivées successives

**Définition** *(Applications $n$ fois dérivables sur un intervalle)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de $I$ dans $E$.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to E$ existe, on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur l'intervalle $I$, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée $n$-ième* de $f$ sur $I$.

L'application $f^{(n)}$ est parfois notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

**Remarque** *(Vecteur dérivé $n$-ième en un point)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, $a$ un point de $I$ et $n$ un entier naturel. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable en $a$ si $f$ est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de $a$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en $a$.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *vecteur dérivé $n$-ième* de $f$ au point $a$ de $I$ (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur $I$ tout entier.)

**Définition** *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, $k$ fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur $I$, on dit que $f$ est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur $I$.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $E$.

On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $I$ si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$ pour tout entier naturel $k$ (c'est-à-dire en fait si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k$).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

**Remarque**

$\mathcal{C}^0(I,E)$ désigne l'ensemble des applications continues de $I$ dans $E$.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I,E) \supset \mathcal{C}^1(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I,E)$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,E)$.

## II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

**Proposition** *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

$\mathcal{C}^k(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire de $\mathcal{C}^k(I,E)$ dans $\mathcal{C}^0(I,E)$.

**Proposition** *(Formule de Leibniz)*

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $\mathbb{K}$.

Alors $fg$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

**Remarques**

– Le résultat précédent implique que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'algèbre.

– "Leibniz" est encore valable si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $g$ est à valeurs dans $E$, ou si $f$ et $g$ sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée $E$.

**Proposition** *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.

**Proposition** *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit $\varphi$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $\varphi(I)$.

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $J$ dans $E$.

Alors l'application $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $E$.

## II.4 Difféomorphismes

**Définition** *($\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

On dit qu'une application $f$ de $I$ dans $J$ est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si $f$ est une bijection de $I$ sur $J$, et si les deux applications $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

**Proposition** *(Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

$f$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I$ sur $J = f(I) \Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \neq 0$.

## II.5 Applications de classe Ck par morceaux

**Définition**

Soit $f$ une application définie sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans $E$.

Soit $k$ un entier naturel. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de $f$ à chaque sous-intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Dans ce cas, on dit que la subdivision $(a_j)_{0\le j\le n}$ est *adaptée* à $f$.

**Remarques**

- Si $f$ est de de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$ alors ses dérivées successives, encore notées $f^j$ ou $D^j(f)$ avec $1 \le j \le k$, sont définies sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si $I$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (et donc plus nécessairement un segment), l'application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $I$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout sous-segment de $I$.
- On vérifie que l'ensemble $\mathcal{M}^k(I,E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $I$, à valeurs dans $E$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

**Proposition** *(Caractérisation des applications constantes)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $E$, continue et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Alors $f$ est constante sur $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$ sur $I$.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens $\Leftarrow$.)