Dérivation et intégration

Sommaire

I Dérivabilité d'une fonction vectorielle 2
I.1 Dérivabilité en un point 2
I.2 Dérivabilité sur un intervalle 3
II Applications de classe Ck 4
II.1 Opérations sur les applications de classe C1 4
II.2 Dérivées successives 5
II.3 Opérations sur les applications de classe Ck 6
II.4 Difféomorphismes 6
II.5 Applications de classe Ck par morceaux 7
III Intégrale des fonctions continues par morceaux 8
III.1 Fonctions en escaliers 8
III.2 Intégrale des fonctions en escaliers 9
III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux 9
III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux 10
III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles 11
III.6 Extension de la définition et notation définitive 12
III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz 13
IV Primitives et intégrales 14
IV.1 Primitives 14
IV.2 Le théorème fondamental 14
IV.3 Calcul des intégrales 15
IV.4 Le théorème du relèvement 16
V Accroissements finis et formules de Taylor 17
V.1 Inégalité des accroissements finis 17
V.2 Formules de Taylor 18
V.3 Application aux développements limités 18
VI Intégrales dépendant d'un paramètre 20

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I Dérivabilité d'une fonction vectorielle

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ (comme d'habitude, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I.1 Dérivabilité en un point

Définition *(Vecteur dérivé en un point)*

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée *vecteur dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$.

Définitions complémentaires

– *Vecteur dérivée à gauche*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité gauche de I.

On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a, x<a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à gauche de f en a et est notée $f'_g(a)$.

– *Vecteur dérivée à droite*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité droite de I.

On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a, x>a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E.

Cette limite est appelée vecteur dérivé à droite de f en a et est notée $f'_d(a)$.

Proposition *(Une autre définition de la dérivabilité)*

L'application f est dérivable en un point a de $I \Leftrightarrow$ il existe :
◇ Un vecteur ℓ de E
◇ Une application $x \mapsto \varepsilon(x)$ de I dans E, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(a) = 0$
tels que pour tout x de I : $f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$.
Le vecteur ℓ est alors égal à $f'(a)$.

Propriétés immédiates

– f est dérivable en $a \Leftrightarrow$ elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

– Si f dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse. De même, si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, elle est continue à gauche (resp. à droite) en a.

– La notion d'application dérivable et la valeur des vecteurs dérivés ne dépendent pas de la norme choisie sur E car on a supposé que E est de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

I.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
L'application $f' : I \to E$ qui à tout a associe $f'(a)$ est appelée *application dérivée* de f.
Cette application est également notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^1$)*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarque

Nombre des propriétés qui suivent pourraient être énoncées en termes de vecteurs dérivés en un point ou d'applications dérivables. Conformément au programme elles sont énoncées en termes d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition *(Dérivabilité des applications composantes)*

Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les composantes de $f : \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ ses composantes f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
On a alors : $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) e_k$.

Cas particuliers

- Si $E = \mathbb{K}^n$ et si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, alors $f' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$.
- Supposons que f soit à valeurs complexes, et notons $g = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f})$ et $h = \mathrm{Im}\,(f)$.
  Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow g$ et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  On a alors $f' = g' + ih'$, ou encore $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g) + i\mathrm{D}(g)$.
  De même $\bar{f} = g - ih$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $D(\bar{f}) = g' - ih' = \overline{D(f)}$.
- *Applications à valeurs matricielles*
  Soit M une application de I dans $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall x \in I, M(x) = (a_{i,j}(x))$.
  M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \Leftrightarrow$ les np applications $x \mapsto a_{i,j}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  Dans ces conditions, $\forall x \in I, M'(x)$ est la matrice de terme général $a'_{i,j}(x)$.

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Toute application constante f de I dans E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et son application dérivée f' est l'application nulle.
Réciproquement, si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II Applications de classe Ck

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Les espaces vectoriels normés E, F, G sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Opérations sur les applications de classe C1

Proposition *(Linéarité de la dérivation)*

$\mathcal{C}^1(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(I,E)$ des applications continues de I dans E, lui-même un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}(I,E)$ de toutes les applications I dans E.
$\forall f,g \in \mathcal{C}^1(I,E), \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition *(Composition par une application linéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F, et $(uof)' = uof'$.

Proposition *(Composition par une application bilinéaire)*

Soit f une application de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit g une application de I dans F, de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Alors l'application h définie par $h(x) = B(f(x), g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans G.
De plus $h' = (B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.

Cas particuliers

- Si E est une algèbre normée, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $h' = f'g + fg'$.

  Par récurrence, on vérifie alors que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \cdots f_n$.

  Si de plus E est commutative, alors pour tout entier p : $(f^p)' = p\, f'\, f^{p-1}$.

  Le cas le plus courant est évidemment $E = \mathbb{K}$.

- Soient $f : I \to E$, et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

  Alors $g = \lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

- Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et si E est muni d'un produit scalaire, alors l'application $< f,g >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $< f,g >' = < f',g > + < f,g' >$.

- Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E, alors $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Dérivée de l'inverse)*

Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

La formule $(g^m)' = mg'g^{m-l}$ est alors vraie pour tout entier relatif m.

Si $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition *(Dérivée d'une fonction composée)*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit J un intervalle contenant $\varphi(I)$ et non réduit à un point.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans E.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Autrement dit : $\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

II.2 Dérivées successives

Définition *(Applications n fois dérivables sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans E. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de I dans E.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to E$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée n-ième* de f sur I.

L'application $f^{(n)}$ est parfois notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

Remarque *(Vecteur dérivé n-ième en un point)*

Soit f une application de I dans E, a un point de I et n un entier naturel. On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *vecteur dérivé n-ième* de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur I tout entier.)

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de I dans E, k fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble de ces applications.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarque

$\mathcal{C}^0(I,E)$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I,E) \supset \mathcal{C}^1(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,E) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I,E)$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,E)$.

II.3 Opérations sur les applications de classe Ck

Proposition *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

$\mathcal{C}^k(I,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire de $\mathcal{C}^k(I,E)$ dans $\mathcal{C}^0(I,E)$.

Proposition *(Formule de Leibniz)*

Soit n un élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Remarques

– Le résultat précédent implique que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'algèbre.

– "Leibniz" est encore valable si f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g est à valeurs dans E, ou si f et g sont toutes deux à valeurs dans une algèbre normée E.

Proposition *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $\varphi(I)$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans E.

Alors l'application $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

II.4 Difféomorphismes

Définition *($\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

On dit qu'une application f de I dans J est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si f est une bijection de I sur J, et si les deux applications f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition *(Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)*

f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur $J = f(I) \Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout x de I, $f'(x) \neq 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II.5 Applications de classe Ck par morceaux

Définition

Soit f une application définie sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans E.

Soit k un entier naturel. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Dans ce cas, on dit que la subdivision $(a_j)_{0\leq j\leq n}$ est *adaptée* à f.

Remarques

- Si f est de de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$ alors ses dérivées successives, encore notées f^j ou $D^j(f)$ avec $1 \leq j \leq k$, sont définies sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (et donc plus nécessairement un segment), l'application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout sous-segment de I.
- On vérifie que l'ensemble $\mathcal{M}^k(I,E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Soit f une application de I dans E, continue et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Alors f est constante sur $I \Leftrightarrow Df \equiv 0$ sur I.

(Cette propriété est surtout utile dans le sens $\Leftarrow$.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

III.1 Fonctions en escaliers

Définition *(Subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Remarque

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ'.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'.

Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ', alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

Définition *(Applications en escaliers)*

Soit f une application de $[a, b]$ dans E. On dit que f est *en escaliers* s'il existe :
– Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$,
– n vecteurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de E,
tels que : $\forall k = 0, \ldots, n-1, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f.

Remarques et notations

– Si σ est une subdivision adaptée à f, toute subvision plus fine que σ est adaptée à f.
– On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
– Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
– Tout combinaison linéaire de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.
$\mathcal{E}([a, b], E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], E)$.
– Si E est une algèbre, notamment si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a, b], E)$: le produit de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est encore en escaliers.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition

Soient $f : I \to E$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, f(t) = u_k$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)u_k$ est appelé *intégrale* de f et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Propriétés

- L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision adaptée á f choisie.
- Si f est constante égale à u sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (b-a)u$.
- Si l'application f est nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points,alors elle est élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
- L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{E}([a, b], E)$ dans E.
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$, alors l'application $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est également en escaliers. De plus on a l'inégalité : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.
- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], E)$ et si c est un élément de $]a, b[$, alors les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- Soit f un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$ et u une application linéaire de E dans F. Alors $u \circ f$ est en escaliers de $[a, b]$ dans F et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

Cas des applications à valeurs réelles

- Si f appartient à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Si f, g appartiennent à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

Remarque

Si f est en escaliers de $[a, b]$ dans E, alors $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

III.3 Définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Notation

On note $\mathcal{M}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, b]$.
C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b], E)$ des applications bornées sur E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition et définition *(Intégrale sur $\mathcal{M}([a,b],E)$)*

Soit f un élément de $\mathcal{M}([a,b],E)$.

On sait qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers l'application f.

Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente dans E.

On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$. Cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a,b]$

Remarques

- La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite (φ_n) de fonctions en escaliers utilisée pour approcher f.
- Elle ne dépend pas non plus de la norme choisie sur E (on rappelle que E est supposé être de dimension finie : toutes les normes sur E sont donc équivalentes.)
- Si l'application f est en escaliers sur $[a,b]$ elle est continue par morceaux.
  L'intégrale de f est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si f est à valeurs réelles, la suite (φ_n) peut être choisie telle que pour tout n, $\varphi_n \leq f$ sur $[a,b]$ (ou telle que pour tout n, $\varphi_n \geq f$ sur $[a,b]$.)

  Si f est à valeurs réelles positives, la suite (φ_n) peut être choisie telle que les φ_n soient elles aussi à valeurs positives sur $[a,b]$.

Proposition *(Invariance de l'intégrale par translation)*

Soit f une application de $I=[a,b]$ dans E, continue par morceaux.

Soit α un nombre réel.

On définit l'application g de $J=[a+\alpha, b+\alpha]$ dans E par $g(t)=f(t-\alpha)$.

Alors g est continue par morceaux sur J et $\displaystyle\int_J g = \int_I f$.

III.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Elles découlent de celles de $\mathcal{E}([a,b],E)$ par passage à la limite.

- **Linéarité**
  L'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire de $\mathcal{M}([a,b],E)$ dans E.
- **Extension aux applications définies "presque partout"**
  Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

  En particulier si f est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si la restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

à $[x_k, x_{k+1}]$ alors on peut encore définir l'intégrale de f, en donnant éventuellement à f une valeur quelconque en chacun des x_k.

– **Composition par une application linéaire**
Soit $f : [a,b] \to E$, continue par morceaux. Soit u une application linéaire de E dans F.
L'application $u \circ f$ appartient à $\mathcal{M}([a,b], F)$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} u \circ f = u\left(\int_{[a,b]} f\right)$.

– **Intégrale et composantes dans une base**
Soit f une application de $[a,b]$ dans E muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ ses composantes : $\forall x \in [a,b], f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, e_k$.
f est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ les composantes f_k sont continues par morceaux.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{[a,b]} f_k\right) e_k$.
En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et si $f = g + ih$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g + i\int_{[a,b]} h$.
Autrement dit : $\mathrm{Re}\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f$, et $\mathrm{Im}\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$

– **Intégrale de la norme**
Si f appartient à $\mathcal{M}([a,b], E)$, alors l'application $\|f\|$, à valeurs réelles et définie sur $[a,b]$ par $t \mapsto \|f(t)\|$, est également continue par morceaux.
De plus on a l'inégalité : $\left\|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$.

III.5 Positivité et croissance de l'intégrale pour les fonctions réelles

On rappelle que le segment $[a,b]$ est tel que $a < b$.

Proposition *(Positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
– Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
– Si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.
– On suppose que f garde un signe constant sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
  ◇ Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$, alors $f(x_0) = 0$.
  ◇ En particulier, si f est continue sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarques

– Le résultat précédent peut s'énoncer, en supposant $f \geq 0$ sur $[a,b]$:

Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$ et si $f(x) > 0$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$. En particulier, si f est continue ≥ 0 mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

– Si f et g sont continues, si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et si $f \neq g$, alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

Proposition *(Inégalité de la moyenne)*

Soit f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

Alors $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

III.6 Extension de la définition et notation définitive

Notation

Soit f une application continue par morceaux de I dans E.

Pour tous points a, b de I, on note :

Si $a < b$, $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$; Si $a > b$, $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$; Si $a = b$, $\int_a^b f = 0$.

Remarques

– On dispose maintenant de la notation $\int_a^b f$, pour deux points quelconques a et b d'un intervalle I sur lequel f est continue par morceaux. On vérifie que $\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

– Les propriétés précédentes, relatives à la linéarité ou aux composantes, restent valables.

– En revanche, les propriétés relatives à la positivité et à la croissance dépendent de la position respective des bornes de l'intégrale.

– L'inégalité de la moyenne devient : $\forall (a,b) \in I^2$, $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

– Si f est continue par morceaux sur I, à valeurs dans E, et si a, b, c sont trois points quelconques de $[a,b]$, alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(Relation de Chasles.)*

On peut généraliser à une suite finie $c_1, \ldots, c_n$ de points de I : $\int_{c_1}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$.

Notation

On note souvent $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ plutôt que $\int_a^b f$. Dans cette notation t est une variable *muette*.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soient f et g deux applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Alors pour tous points a et b de I : $\left|\int_a^b f\,\bar{g}\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

En particulier, si f g sont à valeurs réelles : $\left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Si f et g sont continues sur le segment $[a,b]$, les inégalités précédentes sont des égalités $\Leftrightarrow f$ et g sont proportionnelles sur $[a,b]$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

IV Primitives et intégrales

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

IV.1 Primitives

Définition

Soit f une application continue de I dans E.

On dit qu'une application $F : I \to E$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Extension de la définition

On suppose seulement que $f : I \to E$ est continue par morceaux.

Une primitive de f est alors toute application $F : I \to E$, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f.

Propriétés

- Soit f une application continue par morceaux de I dans E admettant une primitive F.

  Soit G une application de I dans E. G est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante λ telle que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Dans ces conditions, si x_0 est un point de I et si u_0 est un élément quelconque de E, il existe une unique primitive G de f qui prend la valeur u_0 et x_0.

  Cette primitive est donnée par : $G = F - F(x_0) + u_0$.

Remarque

Pour l'instant, rien ne permet de dire si une application f continue par morceaux sur un intervale I y admet des primitives. Le théorème suivant donne la réponse.

IV.2 Le théorème fondamental

Théorème

Si f est continue par morceaux de I dans E, elle y admet des primitives.

Celle qui s'annule en en un point a de I est l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Pour toute primitive G de f , et pour tous points a, x de I, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

Conséquence

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, alors : $\forall (a,x) \in I^2, \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Intégrale fonction de ses bornes)*

Soit f une application continue de I dans E. Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs rélles, et telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

L'application G de J dans E définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

IV.3 Calcul des intégrales

Proposition *(Intégrales des fonctions paires ou impaires)*

On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à 0.

Soit f une application définie sur I, à valeurs dans E, continue par morceaux.

- Si f est paire alors : $\forall a \in I, \int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si f est impaire alors : $\forall a \in I, \int_{-a}^{a} = 0$

Proposition *(Intégrales des fonctions périodiques)*

Soit $f : I \to E$ une application continue par morceaux et T-périodique.

- Pour tous réels a et b, pour tout entier relatif k $\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_{a}^{b} f$.
- Pour tous réels a et b, $\int_{a}^{a+T} f = \int_{b}^{b+T} f$.

Proposition *(Intégration par parties)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$.

Remarques

- On utilise bien sûr la notation $[h]_a^b = h(b) - h(a)$.
- Le résultat s'étend au cas une application est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'autre dans E.

Proposition *(Intégrations par parties répétées)*

Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

$$\int_a^b fg^{(n)} = \left[fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-2}f^{(n-2)}g' + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}g'\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g.$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Proposition *(Changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

Soit φ une application de J dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points a et b de J : $\displaystyle\int_a^b \varphi'(f\circ\varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

Remarques

– Avec la notation définitive de l'intégrale, l'égalité précédente s'écrit :

$\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, où $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

Pour l'utiliser on applique mécaniquement : $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Dans un sens, le passage de a, b à c, d est univoque.

Dans l'autre sens, il faut trouver a, b dans J tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, ce qui est possible de manière unique si φ est bijective de I sur J.

– La formule s'étend au cas où f est seulement continue par morceaux, mais il est alors nécessaire que φ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

IV.4 Le théorème du relèvement

Proposition

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = l\}$.

L'application $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est un *homéomorphisme* de $]-\pi, +\pi[$ sur $U - \{-l\}$, c'est-à-dire une bijection continue dont l'inverse est continue.

La bijection inverse est notée Arg et appelée fonction *argument*.

Pour tout $z = x + iy$ de U, avec $z \neq 1$, $Arg(z) = 2\arctan\dfrac{y}{1+x}$.

Théorème

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans U, avec $n \geq 1$.

Alors il existe une application θ de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, telle que pour tout x de I : $f(x) = \exp(i\theta(x))$. On dit que l'application θ est un *relèvement* de f.

Remarques

– Avec les notations précédentes, θ n'est pas le seul relèvement de f.

En effet, pour tout entier relatif k, l'application $x \mapsto \theta(x) + 2k\pi$ convient encore.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

V Accroissements finis et formules de Taylor

V.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que pour tout x de $]a,b[$, $\|f'(x)\| \leq M$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$.

Cas particulier

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Alors $\|f(b)-f(a)\| \leq M\,|b-a|$, avec $M = \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$.

Remarques

– L'inégalité des accroissements finis reste valable si f est seulement supposée continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.

– Attention ! Le théorème de Rolle et l'*égalité* des accroissements finis ne sont valables que pour des applications à valeurs *réelles*.

Par exemple, l'application $f :\ t \mapsto \exp(it)$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$ et elle vérifie $f(0) = f(1)$.

Pourtant sa dérivée $f' :\ t \mapsto i\exp(it)$ ne s'annule jamais sur $]0,2\pi[$.

Proposition *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit f une application continue de I dans E, dérivable sur l'intérieur de I.
f est k-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I, $\|f'(x)\| \leq k$.

Proposition *(Prolongement d'une application dérivable)*

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que f' possède dans E une limite ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $f'(a) = \ell$.

Remarque

On obtient un résultat analogue au point b de $[a,b]$.

Plus généralement, si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$, et si pour tout $k \leq n$ l'application $f^{(k)}$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

V.2 Formules de Taylor

Proposition *(Formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f : I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I.
Soit a un point de I. Alors pour tout x de I, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

R_n est appelé le *reste d'ordre* n de la formule de Taylor de f au point a.

Proposition *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f : I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient a et b deux points de I.
Alors : $\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $M = \sup_{[a,b]} \left\| f^{n+1} \right\|$.

Remarques

- Si $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :
$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M = \sup_{[a,a+h]} \left\| f^{n+1} \right\|.$$

V.3 Application aux développements limités

Définition

Soit f une application de I dans E. Soient x_0 un point de I et n un entier naturel.
On dit que f possède un *développement limité* (un DL) d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ vecteurs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de E, et une application ε de I dans E tels que, pour tout x de I :
$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques et propriétés

- On note souvent $\mathrm{o}(x - x_0)^n$ plutôt que $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$.
- Si f possède un DL d'ordre n en x_0, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques.
- Si f a un DL d'ordre n en x_0, elle a un DL en x_0 à tout ordre $p \leq n$, par *troncature*.
- f admet un DL d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0.
  Ce DL s'écrit $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.
- f admet un DL d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0.
  Ce DL s'écrit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

– f possède un DL d'ordre n en $x_0 \Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(x_0 + x)$ possède un DL d'ordre n en 0, et avec les mêmes coefficients.

Cette propriété permet de ramener tous les DL à l'origine.

Proposition *(DL obtenu par primitivation d'une application continue)*

Soit g une application continue de I dans E, admettant un DL d'ordre n en x_0 :
$g(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + o(x - x_0)^n$.
Alors toute primitive f de g admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

Remarques

– On remarque que le DL de f est obtenu par intégration terme à terme de celui de g.

– La propriété précédente est vraie notamment si f est de classe $\mathcal{C}^1$: L'existence d'un DL d'ordre n pour f' prouve l'existence d'un DL d'ordre $n + 1$ pour sa primitive f.

– Dans un DL obtenu par primitivation, on n'oubliera pas la constante d'intégration !

Proposition *(Formule de Taylor-Young)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E.
Soit x_0 un point de I. Alors f possède un DL d'ordre n en x_0, sous la forme :
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n.$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VI Intégrales dépendant d'un paramètre

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Proposition *(Continuité sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue.

Proposition *(Dérivation sous le signe d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f admet sur $I \times [a,b]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue.

Alors l'application g définie sur I par : $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout x de I, $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ *(Formule de Leibniz.)*

Remarque

Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \times [a,b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$\forall k \in \{1,...,n\}, \forall x \in I, g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$

Proposition *(Interversion de deux signes d'intégration)*

Soit f une application continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout segment $[c,d]$ inclus dans I, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ *(Théorème de Fubini.)*

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021