

## Opérations sur des suites de carré sommable

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$ .

Un élément  $u$  de  $\mathcal{S}$  sera noté  $u = (u_n)_{n \geq 1}$ .

On note  $\mathcal{S}_1$  le sous ensemble de  $\mathcal{S}$  formé des suites  $u$  telles que la série  $\sum u_n$  soit convergente.

On note  $\mathcal{S}_2$  le sous ensemble de  $\mathcal{S}$  formé des suites  $u$  telles que la série  $\sum u_n^2$  soit convergente.

Pour tout élément  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{S}$ , on note :

–  $\Delta(u)$  la suite de terme général  $v_n = u_{n+1} - u_n$  pour  $n \geq 1$ .

–  $\nabla(u)$  la suite définie par  $w_1 = v_1$  et  $w_n = v_n - v_{n-1}$  si  $n \geq 2$ .

On constate que pour tout  $n \geq 2$ ,  $w_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$ .

Pour tout élément  $u$  de  $\mathcal{S}_2$ , on note  $\sigma(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ .

- Montrer que  $\mathcal{S}_1$  n'est pas inclus dans  $\mathcal{S}_2$ , et que  $\mathcal{S}_2$  n'est pas inclus dans  $\mathcal{S}_1$ . [S]
- Montrer que  $\mathcal{S}_1$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . [S]
- Montrer que si les suites  $u, v$  sont dans  $\mathcal{S}_2$ , alors la suite  $p$  de terme général  $p_n = u_n v_n$  est dans  $\mathcal{S}_1$ . [S]
  - En déduire que  $\mathcal{S}_2$  est muni d'une structure d'espace vectoriel. [S]
  - Montrer qu'on définit un produit scalaire sur  $\mathcal{S}_2$  en posant  $\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ . [S]
- Montrer que les restrictions de  $\Delta$  et de  $\nabla$  à  $\mathcal{S}_2$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{S}_2$ .  
Pour toute suite  $u$  de  $\mathcal{S}_2$ , on notera  $J_0(u) = \sigma(u)$ ,  $J_1(u) = \sigma(\Delta(u))$  et  $J_2(u) = \sigma(\nabla(u))$ . [S]
- On considère la suite  $u$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n}$ .
  - Rappeler la valeur de  $J_0(u)$ . [S]
  - Montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ . En déduire  $J_1(u) = \frac{\pi^2}{3} - 3$ . [S]
  - Montrer que  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{4}$ . En déduire  $J_2(u) = \pi^2 - \frac{19}{2}$ . [S]
  - Contrôler qu'on a bien l'inégalité  $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$ . [S]
- Dans cette question, on va déterminer les valeurs propres de la restriction de  $\Delta$  à  $\mathcal{S}_2$ , et les vecteurs propres associés.
  - Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{S}_2$ , vecteur propre de  $\Delta$  pour une valeur propre  $\lambda$  (autrement dit :  $u$  n'est pas la suite nulle et  $\Delta(u) = \lambda u$ ).  
Montrer que  $-2 < \lambda < 0$  et que  $u$  est une suite géométrique de raison  $\lambda + 1$ . [S]
  - Etablir la réciproque. En déduire le spectre de la restriction de  $\Delta$  à  $\mathcal{S}_2$ . [S]



- (c) Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{S}_2$ , vecteur propre de  $\Delta$  pour une valeur propre  $\lambda$ .  
Calculer  $J_0(u)$ ,  $J_1(u)$ ,  $J_2(u)$ , et vérifier l'inégalité  $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$ . [S]
7. Soient  $u$  un élément  $\mathcal{S}_2$ . On note  $v = \Delta(u)$  et  $w = \nabla(u)$ . Montrer que  $J_1(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n$ . [S]
8. Soit  $u$  un élément quelconque de  $\mathcal{S}_2$ .
- (a) En utilisant la question précédente, montrer l'inégalité  $2J_1(u) \leq J_0(u) + J_2(u)$ . [S]
- (b) Existe-t-il des suites de  $\mathcal{S}_2$  qui satisfont à l'égalité  $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$ ? [S]
9. Soit  $u$  un élément quelconque de  $\mathcal{S}_2$ . Montrer que  $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$ . [S]

## Corrigé du problème

1. – La suite de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est dans  $\mathcal{S}_1$  mais pas dans  $\mathcal{S}_2$ .  
 En effet la série  $\sum u_n$  converge (grâce au critère spécial des séries alternées) mais la série  $\sum u_n^2$  diverge (c'est la série harmonique).  
 L'ensemble  $\mathcal{S}_1$  n'est donc pas inclus dans l'ensemble  $\mathcal{S}_2$ .
- La suite  $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est dans  $\mathcal{S}_2$  mais pas dans  $\mathcal{S}_1$ , car  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge mais pas  $\sum \frac{1}{n}$ .  
 L'ensemble  $\mathcal{S}_2$  n'est donc pas inclus dans l'ensemble  $\mathcal{S}_1$ .

[Q]

2.  $\mathcal{S}_1$  est de manière évidente non vide (la suite nulle est dans  $\mathcal{S}_1$ ) et stable par combinaisons linéaires : si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, il en est de même des séries  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ .  
 $\mathcal{S}_1$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ . [Q]

3. (a) Pour tout entier  $N$ , Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\left(\sum_{n=1}^N |u_n v_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^N u_n^2 \sum_{n=1}^N v_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2.$$

Par majoration des sommes partielles, on en déduit la convergence de la série de terme général  $|u_n v_n|$ , c'est-à-dire la convergence absolue de la série  $\sum p_n$ , ce qu'il fallait démontrer. [Q]

- (b) On montre que  $\mathcal{S}_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ .

La suite nulle est évidemment dans  $\mathcal{S}_2$ .

Soient  $u, v$  deux éléments de  $\mathcal{S}_2$ , et soient  $\lambda, \mu$  deux réels quelconques.

Les séries  $\sum u_n^2$ ,  $\sum v_n^2$  et  $\sum u_n v_n$  sont convergentes (pour cette dernière, d'après la question précédente). On en déduit que la série  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)^2$  est convergente, ce qui prouve que  $\lambda u + \mu v$  appartient à  $\mathcal{S}_2$ .

Conclusion :  $\mathcal{S}_2$  est muni d'une structure d'espace vectoriel. [Q]

- (c) La question 2-a prouve l'existence de  $\langle u, v \rangle$ , pour tous éléments  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{S}_2$ .

L'application  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$  est de manière évidente bilinéaire et symétrique.

Il est clair aussi que  $\langle u, u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  est  $\geq 0$  et n'est nul que si la suite  $u$  est nulle.

Conclusion : on a bien défini un produit scalaire sur  $\mathcal{S}_2$ . [Q]

4. Si  $u$  est un élément de  $\mathcal{S}_2$ , c'est-à-dire si la série  $\sum u_n^2$  converge, alors les séries  $\sum u_{n+1}^2$  et  $\sum u_{n-1}^2$  convergent (il ne s'agit que d'une translation d'indice !).

Les suites  $n \mapsto u_{n+1}$  et  $n \mapsto u_{n-1}$  sont donc éléments de  $\mathcal{S}_2$ .

Puisque  $\mathcal{S}_2$  est un espace vectoriel, la suite  $\Delta(u)$  est un élément de  $\mathcal{S}_2$ .

De la même manière, la suite  $\nabla(u)$  appartient à  $\mathcal{S}_2$  (à un indice près, elle se déduit de la suite  $\Delta(u)$  comme la suite  $\Delta(u)$  se déduit de  $u$ .)

L'ensemble  $\mathcal{S}_2$  est donc stable par les applications  $\Delta$  et  $\nabla$ .

Enfin la linéarité de  $\Delta$  et de  $\nabla$  (et donc de leurs restrictions à  $\mathcal{S}_2$ ) est évidente. [Q]

5. (a) On sait bien sûr que  $J_0(u)$ , c'est-à-dire  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , est égal à  $\frac{\pi^2}{6}$ . [Q]

(b) Pour tout  $N \geq 1$ ,  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1}$ .

Quand on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on trouve :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

Puisque  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v = \Delta(u)$  est définie par  $v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ .

On trouve facilement :

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{6} - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned} \quad [Q]$$

(c) Pour tout entier  $N \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n+1)(n-1)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \end{aligned}$$

Quand on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on trouve :  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{4}$ .

Notons  $w$  la suite  $\nabla(u)$ .

On a  $w_1 = v_1 = u_2 - u_1 = -\frac{1}{2}$  et,  $\forall n \geq 2$ ,  $w_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} J_2(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{4}{(n+1)n} - \frac{4}{n(n-1)} + \frac{2}{(n+1)(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{4} + \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} \right) + 4 \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{6} - 4 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - 4 + 2 \cdot \frac{3}{4} = \pi^2 - \frac{19}{2}. \end{aligned} \quad [Q]$$

(d) On constate que :

$$J_0(u)J_2(u) - J_1(u)^2 = \frac{\pi^2}{6} \left( \pi^2 - \frac{19}{2} \right) - \left( \frac{\pi^2}{3} - 3 \right)^2 = \frac{\pi^4}{18} + \frac{5\pi^2}{12} - 9 \approx 0.524 > 0$$

On a donc bien vérifié l'inégalité :  $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$ . [Q]

6. (a) Par hypothèse, et pour tout entier  $n \geq 1$  :  $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$ .

On en déduit  $u_{n+1} = (\lambda + 1)u_n$  et donc, pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = (\lambda + 1)^{n-1} u_1$ .

Autrement dit, la suite  $u$  est géométrique de raison  $\lambda + 1$ .

Mais par hypothèse, la série  $\sum u_n^2$  est convergente.

Cela exige  $|\lambda + 1| < 1$ , c'est-à-dire  $-2 < \lambda < 0$ . [Q]

(b) Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ , avec  $|q| < 1$ .

De cette manière la suite  $u$  est dans  $\mathcal{S}_2$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n$ . Ainsi  $\Delta(u) = (q - 1)u$ .

La suite  $u$  (qui n'est pas nulle si on choisit  $u_1 \neq 0$ ) est donc vecteur propre de  $\Delta$  pour la valeur propre  $q - 1$  (elle même élément de  $] - 2, 0[$ .)

Conclusion : le spectre de la restriction de  $\Delta$  à  $\mathcal{S}_2$  est  $] - 2, 0[$ . Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , le sous-espace propre est l'ensemble des suites géométriques de raison  $\lambda + 1$  (c'est une droite vectorielle, engendrée par la suite de terme général  $(\lambda + 1)^n$ .) [Q]

(c) – On sait que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = (\lambda + 1)^{n-1} u_1$ , avec  $u_1 \neq 0$ .

$$\text{On en déduit } J_0(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = u_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)^{2n} = u_1^2 \frac{1}{1 - (\lambda + 1)^2} = -u_1^2 \frac{1}{\lambda(\lambda + 2)}.$$

– On sait que  $v = \Delta(u) = \lambda u$ .

$$\text{On en déduit } J_1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \lambda^2 J_0(u) = -u_1^2 \frac{\lambda}{\lambda + 2}.$$

– Notons  $w = \nabla(u)$ . Par définition  $w_1 = v_1 = \lambda u_1$ .

$$\text{D'autre part, pour tout } n \geq 2, w_n = v_n - v_{n-1} = \lambda(u_n - u_{n-1}) = \lambda v_{n-1} = \lambda^2 u_{n-1}.$$

$$\text{On en déduit } J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 J_0(u).$$

$$\text{Ainsi } J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 - \lambda^3 u_1^2 \frac{1}{\lambda + 2} = u_1^2 \frac{2\lambda^2}{\lambda + 2}.$$

$$\text{– On constate que } J_1(u)^2 - J_0(u)J_2(u) = \frac{\lambda^2 u_1^4}{(\lambda + 2)^2} + \frac{u_1^2}{\lambda(\lambda + 2)} \frac{2\lambda^2 u_1^2}{\lambda + 2} = u_1^4 \frac{\lambda}{\lambda + 2}.$$

Cette quantité est négative car  $\lambda \in ] - 2, 0[$ .

On a donc l'inégalité  $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$ .

[Q]

7. On sait que la suite  $w$  est dans  $\mathcal{S}_2$  (voir question 4.)

D'après la question 3-a, cela implique la convergence de la série  $\sum u_n w_n$ .

Dans le calcul suivant, toutes les séries sont convergentes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n &= u_1 w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n (v_n - v_{n-1}) = u_1 v_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n v_n - \sum_{n=2}^{\infty} u_n v_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1}) v_n = - \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = -J_1(u). \end{aligned} \quad [\text{Q}]$$

8. (a) Il suffit d'évaluer la différence et d'utiliser le résultat précédent.

$$J_0(u) + J_2(u) - 2J_1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 \geq 0$$

On a donc démontré l'inégalité  $2J_1(u) \leq J_0(u) + J_2(u)$ . [Q]

(b) Notons que la suite nulle convient. Nous allons vérifier que c'est la seule.

On suppose donc que  $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$ .

Comme cela résulte de la question précédente, on a  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 = 0$ .

Autrement dit, et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n + w_n = 0$ .

Or  $w_1 = v_1 = u_2 - u_1$ . On en déduit  $u_2 = 0$ .

D'autre part, pour tout  $n \geq 2$ , on a  $w_n + u_n = u_{n+1} - u_n + u_{n-1}$ .

La suite  $u$  satisfait donc à une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $t^2 - t + 1 = 0$ , dont une racine complexe est  $t = \exp \frac{i\pi}{3}$ .

On en déduit l'existence de scalaires  $\alpha, \beta$  tels que,  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n = \alpha \cos \frac{n\pi}{3} + \beta \sin \frac{n\pi}{3}$ .

Ainsi la suite  $u$  est périodique. Mais pour qu'elle soit élément de  $\mathcal{S}_2$ , il faut au moins qu'elle converge vers 0 : cela n'est possible que si  $u$  est la suite nulle.

Conclusion :

La seule suite  $u$  de  $\mathcal{S}_2$  qui vérifie l'égalité  $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$  est la suite nulle. [Q]

9. D'après la question (a), on peut écrire  $J_1(u)^2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n \right)^2$ .

Or pour tout entier  $N$ , et grâce à Cauchy-Schwarz  $\left( \sum_{n=1}^N u_n w_n \right)^2 \leq \sum_{n=1}^N u_n^2 \sum_{n=1}^N w_n^2$ .

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on trouve :  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2$ .

On a donc prouvé l'inégalité :  $J_1(u)^2 \leq J_0(u) J_2(u)$ . [Q]