Période du pendule simple

D'après le concours Centrale-Supélec 1998, première épreuve, filière TSI

Le but du problème est la définition et l'étude de certaines fonctions.

Cette étude est suivie d'une application relative au pendule simple.

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Si f est une fonction réelle de la variable réelle, f^2 désigne la fonction : $x \mapsto f(x)^2$.
- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ désigne l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, où n et p sont deux entiers naturels non nuls.
- k désigne un élément fixé de l'intervalle $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaire

1. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivante :

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$$

   Démontrer que ϕ est bijective et définir son application réciproque ϕ^{-1}.

2. Pour toute application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on note g la composée $f \circ \phi$.
   (a) Démontrer que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ si et seulement si g y est également.
   (b) On suppose que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ de g en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
   (c) En déduire l'ensemble E suivant : $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}$.

3. Démontrer que si f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = f(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

   alors il existe α dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \alpha(x+y)$$

Partie II

1. **Définition d'une certaine bijection**

   (a) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ existe pour tout x de $[0,1]$.

   (b) On note désormais, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, $\operatorname{ArcS}(x)$ cette intégrale.
   Démontrer qu'on définit ainsi une bijection ArcS de $[0,1]$ sur $[0,\operatorname{ArcS}(1)]$.

2. **Étude de la dérivabilité de la bijection réciproque et de deux autres fonctions**

   On note S la bijection réciproque de ArcS .
   On pose $\mathrm{C}=\sqrt{1-\mathrm{S}^2}$ et $\mathrm{D}=\sqrt{1-k^2\mathrm{S}^2}$. On note T le réel $\operatorname{ArcS}(1)$.

   (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,T]$ et que l'on a : $\mathrm{S}'=\mathrm{CD}$.

   (b) Étudier la dérivabilité de D et C, et exprimer leurs dérivées à l'aide de S, C et D.

3. **Définition des fonctions s, c et d**

   (a) Démontrer qu'il existe une unique fonction impaire s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui soit $2T$-antipériodique ($\forall x\in\mathbb{R},\ s(x+2T)=-s(x)$), et telle que : $\forall x\in[0,T],\ s(x)=\mathrm{S}(x)$.

   (b) On définit de même les fonctions c et d par les propriétés suivantes :
   – c est paire, $2T$-antipériodique, et : $\forall x\in[0,T],\ c(x)=\mathrm{C}(x)$.
   – d est paire, $2T$-périodique, et : $\forall x\in[0,T],\ d(x)=\mathrm{D}(x)$
   On ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité des fonctions c et d.
   Démontrer les relations suivantes : $1-s^2=c^2$ et $1-k^2s^2=d^2$.

   (c) Reconnaître les fonctions s, c et d dans le cas particulier $k=0$.
   Dans toute la suite du problème on suppose k dans $]0,1]$.

4. **Dérivabilité de s, c et d**

   (a) Montrer que s,c,d sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Exprimer s',c',d' à l'aide de s,c,d.

   (b) Démontrer que s, c et d sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de s, c et d.

6. **Formules d'addition et quelques valeurs prises par s, c et d**

   (a) Démontrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ s(x+y)=\dfrac{s(x)(cd)(y)+s(y)(cd)(x)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}$

   On établit de même (et on l'admettra) que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

   $$c(x+y)=\frac{c(x)c(y)-(sd)(x)(sd)(y)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}\quad\text{et}\quad d(x+y)=\frac{d(x)d(y)-k^2(sc)(x)(sc)(y)}{1-k^2s^2(x)s^2(y)}$$

   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer $s(T-x),c(T-x),d(T-x)$ à l'aide de $s(x),c(x),d(x)$.
   En déduire les réels $d(T/2),s(T/2),c(T/2)$ en fonction de $k'=\sqrt{1-k^2}$.

Partie III

Dans cette partie on écrit T comme la somme d'une série et on en déduit une méthode de calcul de la période du pendule simple.

1. **Calcul d'une intégrale**

   On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

   Établir une relation entre w_{n+2} et w_n et en déduire une expression, pour tout n de $\mathbb{N}$, de w_{2n} à l'aide de factorielles, d'une puissance de 2 et du nombre π.

2. **Une nouvelle expression de T**

   (a) Démontrer que : $T = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$.

   (b) En déduire : $T = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n} k^{2n} \sin^{2n} \theta \Big) \, \mathrm{d}\theta$

   (c) En admettant qu'on peut intégrer terme à terme l'expression précédente, démontrer que : $T = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n k^{2n}$, où les a_n sont des rationnels à préciser.

3. **Période du pendule simple**

   On démontre en physique que dans un système d'unités bien choisi la période $P(\theta_0)$ du pendule simple est donnée par l'expression ci-dessous, où θ_0 est une constante fixée dans $]0, \pi[$ et dépendant des conditions initiales du mouvement du pendule :

   $$P(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

   (a) Justifier l'existence de l'intégrale donnant $P(\theta_0)$.

   (b) Démontrer, à l'aide du changement de variable $u = \sin \dfrac{\theta}{2} / \sin \dfrac{\theta_0}{2}$, que $P(\theta_0)$ est le nombre T obtenu quand on choisit $k = \sin \dfrac{\theta_0}{2}$.

   (c) On pose : $u_n(\theta_0) = \dfrac{(2n)!^2}{2^{4n}\, n!^4} \sin^{2n} \dfrac{\theta_0}{2}$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}(\theta_0)}{u_n(\theta_0)} \leq \sin^2 \dfrac{\theta_0}{2}$.

   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j(\theta_0) \leq u_n(\theta_0) \tan^2 \frac{\theta_0}{2}$.

   (d) Soit ε un réel strictement positif. Déduire de ce qui précède une méthode de calcul d'une valeur approchée à ε près de la période du pendule simple, θ_0 étant supposé connu. Donner la valeur obtenue pour $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

   (e) Calculer la limite de $P(\theta_0)$ quand θ_0 tend vers 0.