# Déterminants de Hankel

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{K}$.

Pour tous entiers $n$ et $p$, on note : $M(n,p) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \dots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \dots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \dots & u_{n+2p} \end{pmatrix}$

$M(n,p)$ appartient donc à $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$,

$M(n,0) = (\,u_n\,)$, $\quad M(n,1) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}$, $\quad M(n,2) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{pmatrix}$

On note $\Delta(n,p) = \det M(n,p)$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des suites $(u_n)$ de $\mathbb{K}$ telles que le déterminant $\Delta(n,p)$ soit nul pour tout entier $n$.

L'objet de ce problème est d'étudier les suites $(u_n)$ de $\mathcal{S}_p$.

## Partie I

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $n \geq 2$.

On note $\operatorname{Com} A$ la comatrice de $A$.

1. Rappeler la valeur du produit $({}^{\mathrm{T}}\operatorname{Com} A)A$. [S]
2. Montrer successivement que :
   (a) Si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = n$. [S]
   (b) Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 1$ (utiliser des applications linéaires.) [S]
   (c) Si $\operatorname{rg} A \leq n-2$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 0$. [S]
3. Si on note $A_{ij}$ le cofacteur d'indice $(i,j)$ de la matrice $A$, montrer que :
   $\det A = 0 \Rightarrow \forall (i,j,k,l) \in \{1,\dots,n\}^4, \quad A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$. [S]

## Partie II

1. Identifier $\mathcal{S}_0$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des suites géométriques. [S]
3. On suppose qu'il existe $p+1$ scalaires non tous nuls $a_0, a_1, \dots, a_p$ tels que, pour tout entier $n$, $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_p u_{n+p} = 0$.
   Montrer alors que la suite $(u_n)$ est élément de $\mathcal{S}_p$. [S]

## Partie III

Dans cette partie, $p$ est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

On suppose que la suite $(u_n)$ est un élément de $\mathcal{S}_p$. On suppose qu'il existe un entier $n_0$ strictement positif tel que le déterminant $\Delta(n_0, p-1)$ soit non nul.

1. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $\Delta(n+2, p-1)\Delta(n, p-1) - \Delta^2(n+1, p-1) = 0$. [S]
2. En déduire la nature de la suite $n \to \Delta(n, p-1)$, et montrer que pour tout entier naturel $n$ le déterminant $\Delta(n, p-1)$ est non nul. [S]
3. Montrer que pour entier $n$ de $\mathbb{N}$, la matrice $\operatorname{Com} M(n,p)$ est de rang 1. Montrer également que sa première et sa dernière lignes sont non identiquement nulles. [S]
4. Montrer que pour tout $k$ de $\{1, \ldots, n\}$, la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k,p)$ est égale ou opposée à la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1,p)$. [S]
5. En déduire que la première ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est un multiple non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0,p)$. [S]
6. En développant $\Delta(n,p)$, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_p$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_p \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$. [S]

## Partie IV

1. Déterminer les suites $(u_n)$ telles que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $\begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{vmatrix} = 0$, avec $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$. [S]
2. Pour tous entiers $n$ et $p$, calculer le déterminant

$$D(n,p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \ldots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \ldots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$

[S]

# Corrigé du problème

## Partie I

1. C'est du cours : $({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A)A = (\det A)\mathrm{I}_n$. [Q]
2. (a) L'égalité précédente donne $\det({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A) \cdot \det A = (\det A)^n$.
   Ainsi $\det \mathrm{Com}\, A = (\det A)^{n-1}$ puisque $\det A \neq 0$.
   La comatrice de $A$, de déterminant non nul, est donc de rang $n$ (inversible.) [Q]

   (b) On munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique $(e)$.
   ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A$ et $A$ sont alors les matrices des endomorphismes respectifs $g$ et $f$.
   L'égalité $({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A)A = (\det A)\mathrm{I}_n = 0_n$ s'écrit $g \circ f = 0$.
   Cette égalité exprime l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
   Par hypothèse $\mathrm{rg}\, f = n-1$, et donc $\dim \mathrm{Ker}\, g \geq n-1$.
   Puisque le rang de $f$ (c'est-à-dire celui de $A$, c'est-à-dire l'ordre du plus grand déterminant extrait non nul de $A$) est égal à $n-1$, l'un au moins des cofacteurs de $A$ est non nul. Autrement dit $\mathrm{Com}\, A \neq 0$, et donc $g \neq 0$.
   L'inégalité $\dim \mathrm{Ker}\, g \geq n-1$ est donc une égalité. Ainsi $\mathrm{rg}\, g = n - \dim \mathrm{Ker}\, g = 1$. [Q]

   (c) Si $\mathrm{rg}\, A < n-1$, tous les déterminants d'ordre $n-1$ extraits de $A$ sont nuls.
   La comatrice de $A$ est donc nulle : $\mathrm{rg}\, \mathrm{Com}\, A = 0$. [Q]
3. Si $\det A = 0$, on sait maintenant que $\mathrm{Com}\, A$ est de rang inférieur ou égal à 1.
   En particulier, tous ses déterminants extraits d'ordre 2 sont nuls.
   Autrement dit, pour tous indices $i, j, k, l$ avec $i \neq j$ et $k \neq l$, on a :
   $$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$$
   Si $i = j$ ou si $k = l$, ce résultat est encore vrai (il est même évident.) [Q]

## Partie II

1. $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des suites $(u_n)$ de $\mathbb{K}$ telles que $\Delta(n, 0) = 0$ pour tout entier $n$.
   Or $\Delta(n, 0) = u_n$ : l'ensemble $\mathcal{S}_0$ se réduit donc à la suite nulle. [Q]
2. Pour tout entier $n$, $\Delta(n, 1) = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{vmatrix} = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$.
   $\mathcal{S}_1$ est donc l'ensemble des suites $(u_n)$ de $\mathbb{K}$ telles que $u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2$ pour tout entier $n$.
   On sait que cette égalité caractérise les suites géométriques. [Q]
3. Si on écrit cette égalité aux rangs $n, n+1, \ldots, n+p$, on obtient :
   $$a_0 \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} + \cdots + a_p \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p+1} \\ \vdots \\ u_{n+2p} \end{pmatrix} = 0$$
   Cette égalité exprime que les colonnes du déterminant $\Delta(n, p)$ sont liées.
   Ainsi $\Delta(n, p) = 0$ pour tout $n$, ce qui signifie que la suite $(u_n)$ est dans $\mathcal{S}_p$. [Q]

## Partie III

1. Notons $A_{ij}$ le cofacteur d'indice $(i,j)$ de la matrice $M(n,p)$.

   Il est clair que : $A_{11} = \begin{vmatrix} u_{n+2} & \dots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p+1} & \dots & u_{n+2p} \end{vmatrix} = \Delta_{n+2,p-1}$

   et que : $A_{p+1,p+1} = \begin{vmatrix} u_{n} & \dots & u_{n+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p-1} & \dots & u_{n+2p-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n,p-1}$

   D'autre part $A_{1,p+1} = A_{p+1,1} = (-1)^p \begin{vmatrix} u_{n+1} & \dots & u_{n+p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p} & \dots & u_{n+2p-1} \end{vmatrix} = (-1)^p\Delta_{n+1,p-1}$

   Par hypothèse la matrice $M(n,p)$ est non inversible. On peut donc appliquer la question (I.3) qui donne en particulier : $A_{11}A_{p+1,p+1} - A_{1,p+1}A_{p+1,1} = 0$.

   Compte tenu ce qui précède, cette relation s'écrit :

   $\Delta(n+2,p-1)\Delta(n,p-1) - \Delta^2(n+1,p-1) = 0$. [Q]

2. Le résultat précédent exprime que la suite de terme général $\delta_n = \Delta(n,p-1)$ vérifie, pour tout entier $n$, $\delta_{n+2}\delta_n = \delta_{n+1}^2$ : on reconnait la caractérisation des suites géométriques.

   La suite $n \to \Delta(n,p-1)$ est donc géométrique, et son terme d'indice $n_0 \geq 1$ est non nul.

   Cela implique à la fois que le premier terme et que la raison de cette suite sont non nuls : il en est alors ainsi de tous les termes.

   Ainsi, pour tout entier naturel $n$, le déterminant $\Delta(n,p-1)$ est non nul. [Q]

3. Pour entier $n$ de $\mathbb{N}$, la matrice $M(n,p)$ (qui est carrée d'ordre $p+1$) est de rang $p$ : en effet son déterminant est nul, mais certains de ses déterminants extraits d'ordre $p$ sont non nuls (par exemple $\Delta(n+1,p-1)$ qui est le mineur du coefficient d'indice $(1,1)$.)

   En utilisant la partie I, on en déduit que la comatrice de $M(n,p)$ est de rang 1.

   Le premier coefficient de la première ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est $\Delta(n+1,p-1)$, qui est non nul.

   Le dernier coefficient de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est $\Delta(n,p-1)$, qui est non nul.

   La première et la dernière lignes de $\operatorname{Com} M(n,p)$ sont donc non identiquement nulles. [Q]

4. Soit $k$ un entier compris entre 1 et $n$.

   Les deux matrices suivantes sont carrées d'ordre $p+1$ :

$$M(k,p) = \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \dots & u_{k+2p-1} \\ u_{k+p} & u_{k+p+1} & \dots & u_{k+2p} \end{pmatrix}$$

$$M(k-1,p) = \begin{pmatrix} u_{k-1} & u_k & \dots & u_{k+p-1} \\ u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \dots & u_{k+2p-1} \end{pmatrix}$$

On voit que les lignes $1, 2, \ldots, p$ de $M(k, p)$ sont les lignes $2, 3, \ldots, p+1$ de $M(k-1, p)$.
Ainsi pour tout $j$ de $\{1, \ldots, p+1\}$, le mineur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k, p)$ est égal au mineur d'indice $(1, j)$ de $M(k-1, p)$.

On passe des mineurs aux cofacteurs en multipliant par $(-1)^i$, où $i$ est l'indice de ligne.

Pour tout $j$ de $\{1, \ldots, p+1\}$, le cofacteur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k, p)$ est donc égal au produit par $(-1)^p$ du cofacteur d'indice $(1, j)$ de $M(k-1, p)$.

Autrement dit : la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k, p)$ est égale au produit par $(-1)^p$ de la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1, p)$. [Q]

5. Pour tout entier naturel $k$, la matrice $\operatorname{Com} M(k, p)$ est de rang 1. En particulier sa première et sa dernière ligne sont proportionnelles. Mais on sait que ces deux lignes sont non nulles.

   Ainsi la première ligne de $\operatorname{Com} M(k, p)$ est un multiple *non nul* de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k, p)$, elle même égale ou opposée à la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1, p)$ si $k \geq 1$.

   Par une récurrence finie descendante, on voit donc que la première ligne de $\operatorname{Com} M(n, p)$ est un multiple non nul de la la première ligne de $\operatorname{Com} M(0, p)$, qui est elle-même un multiple non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0, p)$ : c'est ce qu'il fallait démontrer. [Q]

6. Notons $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,p+1}$ les cofacteurs des coefficients de la première ligne de $M(n, p)$ : ils forment la première ligne de $\operatorname{Com} M(n, p)$.

   Le développement de $\Delta(n, p)$ (dont la valeur est 0) par rapport à la première ligne s'écrit :

   $$A_{1,1} u_n + A_{1,2} u_{n+1} + \cdots + A_{1,p+1} u_{n+p} = 0$$

   Mais on sait que la première ligne $(A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,p+1})$ de $\operatorname{Com} M(n, p)$ est un multiple par un coefficient $\lambda$ non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0, p)$, que nous noterons ici $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$.

   L'égalité précédente s'écrit donc (après simplification par $\lambda$) :

   $$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$$

   L'intérêt de ce résultat est que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ne dépendent pas de $n$. L'égalité précédente traduit donc une relation de récurrence (indépendante de $n$), linéaire et "de pas $p+1$" c'est-à-dire reliant $p+1$ termes successifs quelconques de la suite $(u)$.

   Il reste à vérifier que cette relation est réellement de pas $p+1$, ce qui revient à prouver que les coefficients extrêmes $a_0$ et $a_p$ sont non nuls.

   En effet la matrice $M(0, p)$ s'écrit $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{p-1} & u_p & \ldots & u_{2p-1} \\ u_p & u_{p+1} & \ldots & u_{2p} \end{pmatrix}$

   On en déduit $a_0 = (-1)^p \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_p & \ldots & u_{2p-1} \end{vmatrix}$ et $a_p = (-1)^p \begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p-1} & \ldots & u_{2p-2} \end{vmatrix}$

   Ainsi $a_0 = (-1)^p \Delta_{1,p-1}$ et $a_p = (-1)^p \Delta_{0,p-1}$ : ces coefficients sont donc non nuls. [Q]

## Partie IV

1. Par hypothèse, on a donc $\Delta(n,2)=0$, pour tout entier naturel $n$.
   On remarque d'autre part que $\Delta(1,1)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-5\neq 0$.
   On est donc dans les conditions du début de la partie III : il existe trois coefficients $a_0,a_1,a_2$, avec $a_0\neq 0$ et $a_2\neq 0$ tels que, pour tout entier $n$ : $a_0u_n+a_1u_{n+1}+a_2u_{n+2}=0$.
   En divisant par $a_2$, on voit qu'il existe $\alpha,\beta$ tels que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n$.
   Avec $n=0$ et $n=1$, on trouve $\begin{cases}\alpha+2\beta=3\\ 3\alpha+\beta=4\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$
   Donc les suites cherchées vérifient, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0$.
   Réciproquement, si une telle relation est vérifiée pour tout $n$, alors les $\Delta(n,2)$ sont nuls.
   L'équation caractéristique est $t^2-t-1=0$ et ses racines sont $r=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Il existe donc $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n$ : $u_n=\lambda r^n+\mu s^n$.
   Avec $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ \lambda r+\mu s=1\end{cases}$,
   c'est-à-dire $\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$, puis $\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=1\end{cases}$.
   Conclusion : Il existe une suite unique $(u_n)$ satisfaisant aux hypothèses indiquées.
   Elle est définie par $u_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. [Q]
2. On constate que $D(n,p)=\Delta(n,p)$, avec $u_n=n^2$.
   Cette suite vérifie :
   $u_{n+3}-u_n=(n+3)^2-n^2=3(2n+3)$, et $u_{n+2}-u_{n+1}=(n+2)^2-(n+1)^2=2n+3$.
   Elle satisfait donc à la relation de récurrence linéaire : $u_{n+3}-3u_{n+2}+3u_{n+1}-u_n=0$.
   Cette suite est donc dans $\mathcal{S}_p$ pour tout $p\geq 2$.
   Les déterminants $D(n,p)$ sont donc nuls si $p\geq 2$.
   Enfin $D(n,0)=n^2$ et $D(n,1)=\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 \end{vmatrix}=-(2n^2+4n+1)$.
   Remarque : il n'est pas vraiment nécessaire d'avoir fait tout ce qui précède pour comprendre pourquoi le déterminant $D(n,p)$ est nul quand $p\geq 2$.
   En effet, les colonnes de $D(n,p)$ s'écrivent :
   $$\begin{pmatrix}(n+j)^2\\(n+1+j)^2\\ \vdots\\ (n+p+j)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2\\(n+1)^2\\ \vdots\\ (n+p)^2\end{pmatrix}+2j\begin{pmatrix}n\\n+1\\ \vdots\\ n+p\end{pmatrix}+j^2\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$
   Les colonnes de $D(n,p)$, qui sont donc combinaisons linéaires de trois colonnes constantes, sont nécessairement liées si l'ordre du $p+1$ du déterminant est au moins égal à 3.
   On retrouve ainsi que le déterminant $D(n,p)$ est nul quand $p\geq 2$. [Q]