Déterminants de Hankel

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.

Pour tous entiers n et p, on note : $M(n,p) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \cdots & u_{n+2p} \end{pmatrix}$

$M(n,p)$ appartient donc à $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$M(n,0) = (u_n), \quad M(n,1) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}, \quad M(n,2) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{pmatrix}$$

On note $\Delta(n,p) = \det M(n,p)$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que le déterminant $\Delta(n,p)$ soit nul pour tout entier n.

L'objet de ce problème est d'étudier les suites (u_n) de $\mathcal{S}_p$.

Partie I

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $n \geq 2$.

On note $\operatorname{Com} A$ la comatrice de A.

1. Rappeler la valeur du produit $({}^{\mathrm{T}}\operatorname{Com} A)A$. [S]
2. Montrer successivement que :
   (a) Si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = n$. [S]
   (b) Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 1$ (utiliser des applications linéaires.) [S]
   (c) Si $\operatorname{rg} A \leq n-2$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 0$. [S]
3. Si on note A_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice A, montrer que :
   $\det A = 0 \Rightarrow \forall (i,j,k,l) \in \{1,\ldots,n\}^4, \quad A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$. [S]

Partie II

1. Identifier $\mathcal{S}_0$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des suites géométriques. [S]
3. On suppose qu'il existe $p+1$ scalaires non tous nuls $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tels que, pour tout entier n, $a_0u_n + a_1u_{n+1} + \cdots + a_pu_{n+p} = 0$.
   Montrer alors que la suite (u_n) est élément de $\mathcal{S}_p$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie III

Dans cette partie, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

On suppose que la suite (u_n) est un élément de $\mathcal{S}_p$. On suppose qu'il existe un entier n_0 strictement positif tel que le déterminant $\Delta(n_0, p-1)$ soit non nul.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\Delta(n+2,p-1)\Delta(n,p-1) - \Delta^2(n+1,p-1) = 0$. [S]
2. En déduire la nature de la suite $n \to \Delta(n,p-1)$, et montrer que pour tout entier naturel n le déterminant $\Delta(n,p-1)$ est non nul. [S]
3. Montrer que pour entier n de $\mathbb{N}$, la matrice $\mathrm{Com}\, M(n,p)$ est de rang 1. Montrer également que sa première et sa dernière lignes sont non identiquement nulles. [S]
4. Montrer que pour tout k de $\{1,\dots,n\}$, la dernière ligne de $\mathrm{Com}\, M(k,p)$ est égale ou opposée à la première ligne de $\mathrm{Com}\, M(k-1,p)$. [S]
5. En déduire que la première ligne de $\mathrm{Com}\, M(n,p)$ est un multiple non nul de la dernière ligne de $\mathrm{Com}\, M(0,p)$. [S]
6. En développant $\Delta(n,p)$, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires $a_0, a_1, \dots, a_p$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_p \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_0u_n + a_1u_{n+1} + \cdots + a_pu_{n+p} = 0$. [S]

Partie IV

1. Déterminer les suites (u_n) telles que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{vmatrix} = 0$, avec $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$. [S]
2. Pour tous entiers n et p, calculer le déterminant

$$D(n,p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \dots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \dots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$

[S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

Partie I

1. C'est du cours : $({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A)A = (\det A)\mathrm{I}_n$. [Q]
2. (a) L'égalité précédente donne $\det({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A)\cdot \det A = (\det A)^n$.
   Ainsi $\det \mathrm{Com}\, A = (\det A)^{n-1}$ puisque $\det A \neq 0$.
   La comatrice de A, de déterminant non nul, est donc de rang n (inversible.) [Q]
   (b) On munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique (e).
   ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A$ et A sont alors les matrices des endomorphismes respectifs g et f.
   L'égalité $({}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\, A)A = (\det A)\mathrm{I}_n = 0_n$ s'écrit $g\circ f = 0$.
   Cette égalité exprime l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
   Par hypothèse $\mathrm{rg}\, f = n-1$, et donc $\dim \mathrm{Ker}\, g \geq n-1$.
   Puisque le rang de f (c'est-à-dire celui de A, c'est-à-dire l'ordre du plus grand déterminant extrait non nul de A) est égal à $n-1$, l'un au moins des cofacteurs de A est non nul. Autrement dit $\mathrm{Com}\, A \neq 0$, et donc $g \neq 0$.
   L'inégalité $\dim \mathrm{Ker}\, g \geq n-1$ est donc une égalité. Ainsi $\mathrm{rg}\, g = n - \dim \mathrm{Ker}\, g = 1$. [Q]
   (c) Si $\mathrm{rg}\, A < n-1$, tous les déterminants d'ordre $n-1$ extraits de A sont nuls.
   La comatrice de A est donc nulle : $\mathrm{rg}\, \mathrm{Com}\, A = 0$. [Q]
3. Si $\det A = 0$, on sait maintenant que $\mathrm{Com}\, A$ est de rang inférieur ou égal à 1.
   En particulier, tous ses déterminants extraits d'ordre 2 sont nuls.
   Autrement dit, pour tous indices i, j, k, l avec $i \neq j$ et $k \neq l$, on a :
$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$$
   Si $i = j$ ou si $k = l$, ce résultat est encore vrai (il est même évident.) [Q]

Partie II

1. $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que $\Delta(n,0) = 0$ pour tout entier n.
   Or $\Delta(n,0) = u_n$: l'ensemble $\mathcal{S}_0$ se réduit donc à la suite nulle. [Q]
2. Pour tout entier n, $\Delta(n,1) = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{vmatrix} = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$.
   $\mathcal{S}_1$ est donc l'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que $u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2$ pour tout entier n.
   On sait que cette égalité caractérise les suites géométriques. [Q]
3. Si on écrit cette égalité aux rangs $n, n+1, \ldots, n+p$, on obtient :
$$a_0 \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} + \cdots + a_p \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p+1} \\ \vdots \\ u_{n+2p} \end{pmatrix} = 0$$
   Cette égalité exprime que les colonnes du déterminant $\Delta(n,p)$ sont liées.
   Ainsi $\Delta(n,p) = 0$ pour tout n, ce qui signifie que la suite (u_n) est dans $\mathcal{S}_p$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie III

1. Notons A_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice $M(n,p)$.

   Il est clair que : $A_{11} = \begin{vmatrix} u_{n+2} & \dots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p+1} & \dots & u_{n+2p} \end{vmatrix} = \Delta_{n+2,p-1}$

   et que : $A_{p+1,p+1} = \begin{vmatrix} u_{n} & \dots & u_{n+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p-1} & \dots & u_{n+2p-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n,p-1}$

   D'autre part $A_{1,p+1} = A_{p+1,1} = (-1)^p \begin{vmatrix} u_{n+1} & \dots & u_{n+p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p} & \dots & u_{n+2p-1} \end{vmatrix} = (-1)^p \Delta_{n+1,p-1}$

   Par hypothèse la matrice $M(n,p)$ est non inversible. On peut donc appliquer la question (I.3) qui donne en particulier : $A_{11}A_{p+1,p+1} - A_{1,p+1}A_{p+1,1} = 0$.

   Compte tenu ce qui précède, cette relation s'écrit :

   $\Delta(n+2,p-1)\Delta(n,p-1) - \Delta^2(n+1,p-1) = 0$. [Q]

2. Le résultat précédent exprime que la suite de terme général $\delta_n = \Delta(n,p-1)$ vérifie, pour tout entier n, $\delta_{n+2}\delta_n = \delta_{n+1}^2$: on reconnait la caractérisation des suites géométriques.

   La suite $n \to \Delta(n,p-1)$ est donc géométrique, et son terme d'indice $n_0 \geq 1$ est non nul. Cela implique à la fois que le premier terme et que la raison de cette suite sont non nuls : il en est alors ainsi de tous les termes.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, le déterminant $\Delta(n,p-1)$ est non nul. [Q]

3. Pour entier n de $\mathbb{N}$, la matrice $M(n,p)$ (qui est carrée d'ordre $p+1$) est de rang p : en effet son déterminant est nul, mais certains de ses déterminants extraits d'ordre p sont non nuls (par exemple $\Delta(n+1,p-1)$ qui est le mineur du coefficient d'indice $(1,1)$.)

   En utilisant la partie I, on en déduit que la comatrice de $M(n,p)$ est de rang 1.

   Le premier coefficient de la première ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est $\Delta(n+1,p-1)$, qui est non nul.

   Le dernier coefficient de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est $\Delta(n,p-1)$, qui est non nul.

   La première et la dernière lignes de $\operatorname{Com} M(n,p)$ sont donc non identiquement nulles. [Q]

4. Soit k un entier compris entre 1 et n.

   Les deux matrices suivantes sont carrées d'ordre $p+1$:

$$M(k,p) = \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \dots & u_{k+2p-1} \\ u_{k+p} & u_{k+p+1} & \dots & u_{k+2p} \end{pmatrix}$$

$$M(k-1,p) = \begin{pmatrix} u_{k-1} & u_k & \dots & u_{k+p-1} \\ u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & u_{k+p} & \dots & u_{k+2p-1} \end{pmatrix}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On voit que les lignes $1, 2, \dots, p$ de $M(k,p)$ sont les lignes $2, 3, \dots, p+1$ de $M(k-1,p)$.
Ainsi pour tout j de $\{1, \dots, p+1\}$, le mineur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k,p)$ est égal au mineur d'indice $(1,j)$ de $M(k-1,p)$.

On passe des mineurs aux cofacteurs en multipliant par $(-1)^i$, où i est l'indice de ligne.
Pour tout j de $\{1, \dots, p+1\}$, le cofacteur d'indice $(p+1, j)$ de $M(k,p)$ est donc égal au produit par $(-1)^p$ du cofacteur d'indice $(1,j)$ de $M(k-1,p)$.
Autrement dit : la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k,p)$ est égale au produit par $(-1)^p$ de la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1,p)$. [Q]

5. Pour tout entier naturel k, la matrice $\operatorname{Com} M(k,p)$ est de rang 1. En particulier sa première et sa dernière ligne sont proportionnelles. Mais on sait que ces deux lignes sont non nulles.
Ainsi la première ligne de $\operatorname{Com} M(k,p)$ est un multiple *non nul* de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k,p)$, elle même égale ou opposée à la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1,p)$ si $k \geq 1$.
Par une récurrence finie descendante, on voit donc que la première ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est un multiple non nul de la la première ligne de $\operatorname{Com} M(0,p)$, qui est elle-même un multiple non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0,p)$: c'est ce qu'il fallait démontrer. [Q]

6. Notons $A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,p+1}$ les cofacteurs des coefficients de la première ligne de $M(n,p)$: ils forment la première ligne de $\operatorname{Com} M(n,p)$.
Le développement de $\Delta(n,p)$ (dont la valeur est 0) par rapport à la première ligne s'écrit :
$$A_{1,1}u_n + A_{1,2}u_{n+1} + \cdots + A_{1,p+1}u_{n+p} = 0$$
Mais on sait que la première ligne $(A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,p+1})$ de $\operatorname{Com} M(n,p)$ est un multiple par un coefficient λ non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0,p)$, que nous noterons ici $(a_0, a_1, \dots, a_p)$.
L'égalité précédente s'écrit donc (après simplification par λ) :
$$a_0u_n + a_1u_{n+1} + \cdots + a_pu_{n+p} = 0$$
L'intérêt de ce résultat est que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_p$ ne dépendent pas de n. L'égalité précédente traduit donc une relation de récurrence (indépendante de n), linéaire et "de pas $p+1$" c'est-à-dire reliant $p+1$ termes successifs quelconques de la suite (u).
Il reste à vérifier que cette relation est réellement de pas $p+1$, ce qui revient à prouver que les coefficients extrêmes a_0 et a_p sont non nuls.
En effet la matrice $M(0,p)$ s'écrit $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{p-1} & u_p & \dots & u_{2p-1} \\ u_p & u_{p+1} & \dots & u_{2p} \end{pmatrix}$
On en déduit $a_0 = (-1)^p \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_p & \dots & u_{2p-1} \end{vmatrix}$ et $a_p = (-1)^p \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p-1} & \dots & u_{2p-2} \end{vmatrix}$
Ainsi $a_0 = (-1)^p \Delta_{1,p-1}$ et $a_p = (-1)^p \Delta_{0,p-1}$: ces coefficients sont donc non nuls. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Partie IV

1. Par hypothèse, on a donc $\Delta(n,2)=0$, pour tout entier naturel n.
On remarque d'autre part que $\Delta(1,1)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-5\neq 0$.
On est donc dans les conditions du début de la partie III : il existe trois coefficients a_0,a_1,a_2, avec $a_0\neq 0$ et $a_2\neq 0$ tels que, pour tout entier n : $a_0u_n+a_1u_{n+1}+a_2u_{n+2}=0$.
En divisant par a_2, on voit qu'il existe α,β tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n$.
Avec $n=0$ et $n=1$, on trouve $\begin{cases}\alpha+2\beta=3\\ 3\alpha+\beta=4\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$
Donc les suites cherchées vérifient, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0$.
Réciproquement, si une telle relation est vérifiée pour tout n, alors les $\Delta(n,2)$ sont nuls.
L'équation caractéristique est $t^2-t-1=0$ et ses racines sont $r=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Il existe donc λ et μ tels que, pour tout n : $u_n=\lambda r^n+\mu s^n$.
Avec $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ \lambda r+\mu s=1\end{cases}$,
c'est-à-dire $\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$, puis $\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=1\end{cases}$.
Conclusion : Il existe une suite unique (u_n) satisfaisant aux hypothèses indiquées.
Elle est définie par $u_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. [Q]
2. On constate que $D(n,p)=\Delta(n,p)$, avec $u_n=n^2$.
Cette suite vérifie :
$u_{n+3}-u_n=(n+3)^2-n^2=3(2n+3)$, et $u_{n+2}-u_{n+1}=(n+2)^2-(n+1)^2=2n+3$.
Elle satisfait donc à la relation de récurrence linéaire : $u_{n+3}-3u_{n+2}+3u_{n+1}-u_n=0$.
Cette suite est donc dans $\mathcal{S}_p$ pour tout $p\geq 2$.
Les déterminants $D(n,p)$ sont donc nuls si $p\geq 2$.
Enfin $D(n,0)=n^2$ et $D(n,1)=\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 \end{vmatrix}=-(2n^2+4n+1)$.
Remarque : il n'est pas vraiment nécessaire d'avoir fait tout ce qui précède pour comprendre pourquoi le déterminant $D(n,p)$ est nul quand $p\geq 2$.
En effet, les colonnes de $D(n,p)$ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix}(n+j)^2\\ (n+1+j)^2\\ \vdots\\ (n+p+j)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2\\ (n+1)^2\\ \vdots\\ (n+p)^2\end{pmatrix}+2j\begin{pmatrix}n\\ n+1\\ \vdots\\ n+p\end{pmatrix}+j^2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Les colonnes de $D(n,p)$, qui sont donc combinaisons linéaires de trois colonnes constantes, sont nécessairement liées si l'ordre du $p+1$ du déterminant est au moins égal à 3.
On retrouve ainsi que le déterminant $D(n,p)$ est nul quand $p\geq 2$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021