# Décomposition QR. Méthode de Householder

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien, pour laquelle la base canonique $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ est orthonormée.

On notera $[x]$ la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que pour tous vecteurs $x$ et $y$, $< x, y >= {}^{\mathrm{T}}[x][y]$.

## Partie I

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *décomposition* $QR$ de $A$ tout couple $(Q, R)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$, $Q$ étant une matrice orthogonale (un élément du groupe $O(n)$) et $R$ une matrice triangulaire supérieure.

Dans toute la suite, on suppose que $A$ est inversible (il en est donc de même de $R$).

1. En invoquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer l'existence de la décomposition $A = QR$ si on suppose que les coefficients diagonaux de la matrice $R$ sont strictement positifs. [S]
2. Par un raisonnement purement matriciel, montrer alors l'existence et l'unicité de la décomposition $QR$ de $A$ quand on fixe à l'avance et de manière quelconque le signe de chacun des coefficients diagonaux de $R$. [S]

## Partie II

Dans cette partie, on étudie une métode permettant de trouver une décomposition $QR$ d'une matrice inversible $A$, et utilisant des produits successifs par des matrices de réflexions (dites *matrices de Householder*).

1. (a) Comment s'écrit la réflexion (c'est-à-dire la symétrie orthogonale) $h$ par rapport à l'hyperplan orthogonal à un vecteur non nul $a$ ? [S]

   (b) Montrer que sa matrice dans la base canonique est $H = I_n - \dfrac{2}{\|a\|^2}\,[a]\,{}^{\mathrm{T}}[a]$.
   On dit que $H$ est la *matrice de Householder* associée à $a$. [S]

   (c) Montrer que si $u$ et $v$ sont deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ et de même norme, alors il existe une réflexion unique $h$ telle que $h(u) = v$. [S]

   (d) Etudier l'existence d'une réflexion $h$ transformant un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^n$ en $v = \lambda e_1$ colinéaire à $e_1$. On illustrera la situation par un schéma. [S]

   (e) Plus généralement, soit $i$ un indice de $\{1, \ldots, n\}$, et $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
   On pose $v = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda, 0, \ldots, 0)$ et $w = (0, \ldots, 0, x_j, \ldots, x_n)$.
   Etudier l'existence d'une réflexion $h$ de $\mathbb{R}^n$ transformant $u$ en $v$.
   Que dire des vecteurs $e_1, \ldots, e_{j-1}$ pour l'application $h$ ? [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2. Dans la suite de cette question, et pour des commodités de notation, on ajoutera la matrice identité $I_n$ à l'ensemble des matrices de Householder.

   (a) Déduire de ce qui précède qu'il existe $n-1$ matrices de Householder $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ telles que pour tout $j$ les coefficients sous-diagonaux des $j$ premières colonnes de $A_j = H_j H_{j-1} \cdots H_1 A$ soient nuls. [S]

   (b) Montrer comment des produits successifs par les matrices $H_j$ permettent d'obtenir séparément les composantes $Q$ et $R$ d'une décomposition $QR$ de la matrice $A$. [S]

   (c) Illustrer cette méthode en décomposant $A = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$ [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# Corrigé du problème

## Partie I

1. La matrice $A$ étant inversible, ses vecteurs colonnes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (considérés comme éléments de $\mathbb{R}^n$) forment une base $(a)$ de $\mathbb{R}^n$, notée $(a)$.

   $A$ est alors la matrice de passage $P_{e,a}$ de la base canonique $(e)$ à la base $(a)$.

   Soient $Q$ et $R$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A = QR$.

   Ces deux matrices sont nécessairement inversibles ($\det Q \det R = \det A \neq 0$).

   Les vecteurs colonnes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de $Q$ forment donc une base $(q)$ de $\mathbb{R}^n$, et $Q$ est la matrice de passage $P_{e,q}$ de la base $(e)$ à la base $(q)$.

   L'égalité $A = QR$ équivaut alors à $R = Q^{-1}A = P_{q,e}P_{e,a} = P_{q,a}$.

   Ainsi $R$ est la matrice de passage de la base $(q)$ à la base $(a)$.

   Dans ces conditions :

   – Dire que $Q$ est orthogonale, c'est dire que $(q)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
   – Dire que $R$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, c'est dire que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, $a_k$ est une combinaison linéaire de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, sa composante sur $q_k$ étant strictement positive.

   On reconnait là les conditions décrivant l'orthonormalisation de la famille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par le procédé de Schmidt.

   On sait que ce procédé est constructif. Il prouve ainsi l'existence d'une famille $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (donc une matrice $Q$ et une matrice $R$), ce qui établit le résultat. [Q]

2. – Existence :

   Soit $A = Q^+R^+$ la décomposition évoquée dans la question précédente (les coefficients diagonaux de $R$ étant strictement positifs.)

   Soit $X$ un sous-ensemble quelconque de $\{1, \ldots, n\}$.

   Soit $J$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux successifs $\lambda_i$ valent 1 si $i$ est dans $X$ et $-1$ sinon : c'est une matrice orthogonale qui vérifie $J^2 = I_n$.

   L'égalité $A = Q^+R^+$ s'écrit donc aussi $A = QR$ avec $Q = Q^+J$ et $R = JR^+$.

   La matrice $Q$ est orthogonale (elle se déduit de $Q^+$ en inversant les signes dans les colonnes d'indice $j \notin X$) et $R$ est triangulaire supérieure (elle se déduit de $R^+$ en inversant les signes dans les lignes d'indice $i \notin X$).

   On a ainsi formé une décomposition $A = QR$ de $A$ pour laquelle le signe des coefficients diagonaux de $R$ est fixé à l'avance.

   Il reste à prouver l'unicité d'une telle décomposition.

   – Unicité :

   Supposons que la matrice $A$ possède deux décompositions, $A = Q_1R_1$ et $A = Q_2R_2$, les coefficients diagonaux respectifs de $R_1$ et de $R_2$ ayant le même signe.

   Il faut montrer $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

   L'égalité $Q_1R_1 = Q_2R_2$ donne $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

La matrice $M = R_2 R_1^{-1}$ est, tout comme $R_1$ et $R_2$, triangulaire supérieure.

Ses coefficients diagonaux sont les quotients deux à deux de ceux de $R_2$ et $R_1$ et sont donc strictement positifs.

Puisque $O(n)$ est un groupe, la matrice $M = Q_2^{-1} Q_1$ est une matrice orthogonale.

La matrice $M^{-1}$ est donc à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (comme inverse et comme transposée d'une matrice ayant cette propriété.) Les matrices $M$ et $M^{-1}$ sont donc diagonales.

Du fait de l'égalité $M^{-1} = {}^{\mathrm{T}}M$, chaque coefficient diagonal de $M$ est égal à son propre inverse et vaut donc à priori $\pm 1$.

Mais on sait que ces coefficients sont positifs : ils sont donc égaux à 1.

On en déduit $M = I_n$, c'est-à-dire $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité de la décomposition $A = QR$ (sous réserve d'existence) dans le cas où on impose à l'avance le signe de chacun des coefficients diagonaux de $R$.

Au total, on peut donc considérer que $A$ possède $2^n$ décompositions $A = QR$, chacune d'elles se déduisant de la décomposition $A = Q^+ R^+$ en inversant le signe d'une ou de plusieurs colonnes de $Q^+$ et celui des lignes de même indice dans $R^+$.

[Q]

## Partie II

1. (a) Cette réflexion est définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^n, h(u) = u - \dfrac{2}{\|a\|^2} < a, u > a$. [Q]

   (b) Pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^n$,

   $$[h(u)] = [u] - \frac{2}{\|a\|^2} {}^{\mathrm{T}}[a][u]\,[a] = [u] - \frac{2}{\|a\|^2} [a]\,{}^{\mathrm{T}}[a]\,[u] = \left(I_n - \frac{2}{\|a\|^2} [a]\,{}^{\mathrm{T}}[a]\right)[u]$$

   Remarque : on a pu écrire ${}^{\mathrm{T}}[a][u]\,[a] = [a]\,{}^{\mathrm{T}}[a]\,[u]$ car ${}^{\mathrm{T}}[a][u]$ est un scalaire.

   Le calcul précédent montre bien que $H = I_n - \dfrac{2}{\|a\|^2} [a]\,{}^{\mathrm{T}}[a]$ [Q]

   (c) Une réflexion $h$ de $\mathbb{R}^n$ est déterminée de manière unique par l'hyperplan $(\Pi)$ par rapport auquel on effectue la symétrie orthogonale.

   Si la réflexion $h$ existe, alors le vecteur non nul $u - v$ est orthogonal à l'hyperplan $(\Pi)$, ce qui détermine $(\Pi)$ et donc $h$ de manière unique.

   Réciproquement, soit $h$ la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à $u - v$.

   $$h(u) = u - \frac{2}{\|u - v\|^2} < u - v, u > (u - v) = u - \frac{1}{\|u - v\|^2} < u - v, 2u > (u - v)$$

   Or $u$ et $v$ ont même norme. Donc $< u - v, u + v > = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut alors écrire $< u-v, 2u > = < u-v, (u+v)+(u-v) > = \|u-v\|^2$.

On en déduit : $h(u) = u - \dfrac{1}{\|u-v\|^2}\,\|u-v\|^2\,(u-v) = v$.

Conclusion : si $u$ et $v$ sont distincts et de même norme, il existe une réflexion $h$ et une seule qui transforme $u$ en $v$.

Remarque : si $u = v$, toute réflextion $h$ par rapport à un hyperplan contenant $u$ laisse le vecteur $u$ invariant et vérifie donc $h(u) = v \ldots$ [Q]

(d) Si $u$ est lui-même colinéaire à $e_1$, toute réflexion laissant invariant $e_1$ convient.

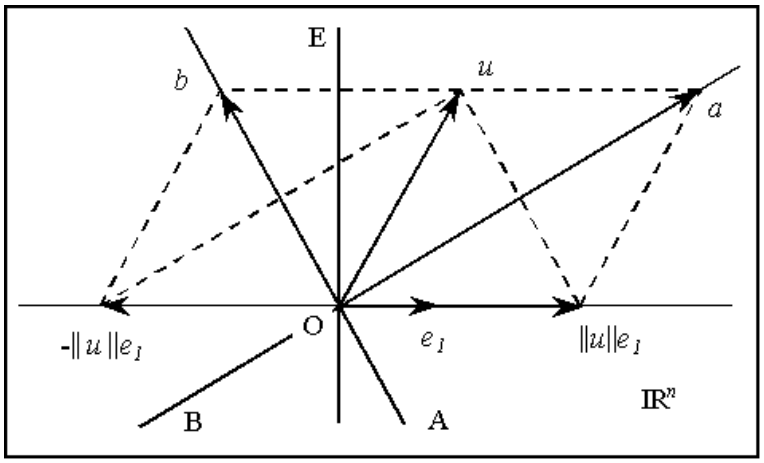
On suppose donc qu'il n'en est pas ainsi.

Puisqu'une réflexion conserve la norme, on a nécessairement $|\lambda| = \|u\|$. On a donc deux possibilités : $\lambda = \varepsilon\,\|u\|$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Les vecteurs $u$ et $v = \lambda e_1$ étant distincts, il y a une solution $h$ unique pour chaque valeur de $\lambda$ : c'est la réflexion $h$ associée au vecteur $a = u - v = u - \varepsilon\,\|u\|\,e_1$.

Si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors $a = (x_1 - \varepsilon\,\|u\|\,, x_2, \ldots, x_n)$.

La figure ci-dessous illustre la situation, avec des notations évidentes :




[Q]

(e) Si $u$ est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_j$, toute réflexion laissant invariant ces vecteurs convient. On suppose que tel n'est pas le cas, ce qui revient à dire que le vecteur $w$ n'est pas colinéaire à $e_j$.

Avec les notations de l'énoncé, $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{j-1} x_k^2 + \lambda^2$ et $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{j-1} x_k^2 + \|w\|^2$.

On a donc nécessairement $|\lambda| = \|w\|$, c'est-à-dire $\lambda = \varepsilon\,\|w\|$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Par hypothèse, $u$ et $v$ sont distincts. Pour chacune des deux valeurs de $\lambda$, il y a donc une solution unique qui est la réflexion $h$ par rapport à l'hyperplan orthogonal à $a = u - v = (0 \ldots, 0, u_j - \varepsilon\,\|w\|\,, u_{j+1}, \ldots, u_n) = w - \varepsilon\,\|w\|\,e_j$.

Puisque $e_1, \ldots, e_{j-1}$ sont orthogonaux au vecteur $a$, ils sont invariants par $h$. [Q]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2. (a) Dans cette question, on identifie les colonnes de $A$ (et des matrices qui vont se déduire de $A$) avec des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et les matrices de Householder avec les transformations orthogonales correspondantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On va démontrer le résultat par une récurrence finie sur l'indice de colonne $j$.
– Traitement de la première colonne :
Soit $u$ le premier vecteur-colonne de $A$.
Si ce vecteur est colinéaire à $e_1$ (c'est-à-dire si les coefficients sous-diagonaux de la première colonne de $A$ sont déjà nuls) on pose $H = I_n$.
Sinon on sait qu'il existe une réflexion $H_1$ telle que le vecteur $v = H_1 u$ soit proportionnel à $e_1$. Mais $v$ est le premier vecteur-colonne de $A_1 = H_1 A$, ce qui établit la propriété au rang 1.
– Traitement de la $j$-ième colonne :
Soit $j$ un entier compris entre 1 et $n-2$. On suppose que les matrices $H_1, \dots, H_{j-1}$ sont connues. Avec les notations de l'énoncé cela signifie que les coefficients sous-diagonaux des $j-1$ premières colonnes de $A_{j-1}$ sont nuls.
S'il en est de même pour le $j$-ème vecteur-colonne de $A_{j-1}$, alors on pose $H_j = I_n$ et donc $A_j = A_{j-1}$.
Sinon soit $u$ le $j$-ième vecteur-colonne de $A_{j-1}$ : on sait qu'il existe une réflexion $H_j$ qui envoie $u$ sur un vecteur $v$ combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_j$.
On sait également que cette réflexion laisse invariant les vecteurs $e_1, \dots, e_{j-1}$. Elle ne modifie donc pas les $j-1$ premiers vecteurs-colonnes de $A_{j-1}$.
Ainsi les coefficients sous-diagonaux des $j$ premières colonnes de $A_j = H_j A_{j-1}$ sont égaux à 0, ce qui démontre la propriété au rang $j$.
– Conclusion :
On a démontré l'existence des $n-1$ matrices de Householder $H_1, \dots, H_{n-1}$.
On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité car à chaque étape on a en général deux possibilités suivant le signe donné au $j$-ème coefficient diagonal de $A_j$.
[Q]

(b) Avec les notations précédentes, la matrice $R = A_{n-1} = H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A$ est triangulaire supérieure. Tout comme les matrices $H_j$ et la matrice $A$, elle est inversible (ses coefficients diagonaux sont non nuls.)
On note que chaque$H_j$ est orthogonale et vérifie $H_j^{-1} = H_j$ (c'est normal pour des matrices de réflexion, mais c'est bien sûr vrai si certaines $H_j$ sont égales à $I_n$.).
On peut alors écrire, en posant $Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$ :

$$A = (H_{n-1} \cdots H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1} R = H_1 H_2 \cdots H_{n-1} R = QR$$

La matrice $Q$ est orthogonale car elle est un produit de matrices orthogonales. On a donc obtenu une décomposition $QR$ de la matrice $A$.
Dans la pratique, on passe de $A$ à $R$ en multipliant à gauche (et successivement) par la matrice $H_1$, puis par la matrice $H_2$, etc.
Si on applique ces mêmes multiplications mais à droite et en partant de $I_n$, alors on forme successivement les matrices $H_1$, $H_1 H_2$ et finalement $Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$. [Q]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

(c) – Traitement de la première colonne :

Le premier vecteur colonne de $A$ est $u_1 = (-4, -4, -8, 23)$.

La norme de ce vecteur est $\|u_1\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2 + 23^2} = 25$.

On va transformer $u_1$ en le vecteur $v_1 = (25, 0, 0, 0)$ au moyen de la réflexion $h_1$ par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur $a_1 = u_1 - \|u_1\| e_1 = (-29, -4, -8, 23)$.

Le carré de la norme de $a_1$ est :

$$2\|u_1\|^2 - 2\|u_1\| < u_1, e_1 >= 2\|u_1\|^2 + 8\|u_1\| = 2 \cdot 25 \cdot 29 = 2 \cdot 725$$

La matrice de Householder associée est :

$$H_1 = I_n - \frac{2}{\|a_1\|^2}[a_1]^{\mathrm{T}}[a_1] = I_n - \frac{1}{725}\begin{pmatrix} -29 \\ -4 \\ -8 \\ 23 \end{pmatrix}(-29 \ -4 \ -8 \ 23)$$

$$= I_n - \frac{1}{725}\begin{pmatrix} 841 & 116 & 232 & -667 \\ 116 & 16 & 32 & -92 \\ 232 & 32 & 64 & -184 \\ -667 & -92 & -184 & 529 \end{pmatrix} = \frac{1}{725}\begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & 196 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$A_1 = H_1 A = \frac{1}{725}\begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & 196 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{25}{29}\begin{pmatrix} 29 & -29 & 58 & 29 \\ 0 & -42 & -15 & 167 \\ 0 & 32 & -88 & -69 \\ 0 & 24 & 21 & -1 \end{pmatrix}$$

– Traitement de la deuxième colonne :

Le deuxième vecteur colonne de $A_1$ est $u_2 = \frac{25}{29}(-29, -42, 32, 24)$.

Posons $w = \frac{25}{29}(0, -42, 32, 24)$ (voir les notations de la question II-1-e.)

La norme de ce vecteur est $\|w\| = \frac{25}{29}\sqrt{42^2 + 32^2 + 24^2} = 50$.

On sait qu'on doit appliquer la réflexion $h_2$ par rapport à l'hyperplan orthogonal à $w - \|w\| e_2 = \frac{100}{29}(0, -25, 8, 6)$. Pour simplifier, on choisit $a_2 = (0, -25, 8, 6)$.

Le carré de la norme de $a_2$ est : $25^2 + 8^2 + 6^2 = 725$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

La matrice de Householder associée est :

$$H_2 = I_n - \frac{2}{\|a_2\|^2}\,[a_2]^{\mathrm{T}}[a_2] = I_n - \frac{2}{725}\begin{pmatrix}0\\-25\\8\\6\end{pmatrix}(0,-25,8,6)$$

$$= I_n - \frac{2}{725}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&625&-200&-150\\0&-200&64&48\\0&-150&48&36\end{pmatrix} = \frac{1}{725}\begin{pmatrix}725&0&0&0\\0&-525&400&300\\0&400&597&-96\\0&300&-96&653\end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice $A_2 = H_2A_1 = H_2H_1A$ :

$$A_2 = \frac{1}{725}\begin{pmatrix}725&0&0&0\\0&-525&400&300\\0&400&597&-96\\0&300&-96&653\end{pmatrix}\frac{25}{29}\begin{pmatrix}29&-29&58&29\\0&-42&-15&167\\0&32&-88&-69\\0&24&21&-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}25&-25&50&25\\0&50&-25&-75\\0&0&-72&-17\\0&0&21&31\end{pmatrix}$$

On trouve alors la matrice $H_1H_2$ :

$$H_1H_2 = \frac{1}{725}\begin{pmatrix}-116&-116&-232&667\\-116&709&-32&92\\-232&-32&661&184\\667&92&184&196\end{pmatrix}\frac{1}{725}\begin{pmatrix}725&0&0&0\\0&-525&400&300\\0&400&597&-96\\0&300&-96&653\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{625}\begin{pmatrix}-100&200&-296&503\\-100&-425&304&328\\-200&400&433&56\\575&100&152&164\end{pmatrix}$$

– Traitement de la troisième colonne :

Le troisième vecteur colonne de $A_2$ est $u_3 = (50,-25,-72,21)$.

Posons $w = (0,0,-72,21)$. La norme de ce vecteur est $\|w\| = \sqrt{72^2+21^2} = 75$.

On sait qu'on doit appliquer la réflexion $h_3$ par rapport à l'hyperplan orthogonal à $a_3 = w - \|w\|\,e_3 = (0,0,-147,21)$.

Le carré de la norme de $a_3$ est : $147^2 + 21^2 = 22050$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

La matrice de Householder associée est :

$$H_3 = I_n - \frac{2}{\|a_3\|^2}\,[a_3]^{\mathrm{T}}[a_3] = I_n - \frac{1}{11025}\begin{pmatrix}0\\0\\-147\\21\end{pmatrix}(0,0,-147,21)$$

$$= I_n - \frac{1}{11025}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&21609&-3087\\0&0&-3087&441\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-24&7\\0&0&7&24\end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice $R = A_3 = H_3A_2 = H_3H_2H_1A$ :

$$R = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-24&7\\0&0&7&24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25&-25&50&25\\0&50&-25&-75\\0&0&-72&-17\\0&0&21&31\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25&-25&50&25\\0&50&-25&-75\\0&0&75&25\\0&0&0&25\end{pmatrix}$$

Enfin, voici $Q = H_1H_2H_3$ :

$$Q = \frac{1}{625}\begin{pmatrix}-100&200&-296&503\\-100&-425&304&328\\-200&400&433&56\\575&100&152&164\end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-24&7\\0&0&7&24\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-4&8&17&16\\-4&-17&-8&16\\-8&16&-16&7\\23&4&-4&8\end{pmatrix}$$

La décomposition de $A$ est alors terminée :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-4&20&35&5\\-4&-30&-15&55\\-8&40&-80&-65\\23&-15&30&15\end{pmatrix}}_{A \text{ inversible}} = \underbrace{\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-4&8&17&16\\-4&-17&-8&16\\-8&16&-16&7\\23&4&-4&8\end{pmatrix}}_{Q \text{ orthogonale}}\underbrace{\begin{pmatrix}25&-25&50&25\\0&50&-25&-75\\0&0&75&25\\0&0&0&25\end{pmatrix}}_{R \text{ triangulaire}}$$

[ Q ]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021