

Matrices et déterminants de Gram

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ le produit scalaire, et $u \mapsto \|u\|$ la norme associée. Soit $(u) = u_1, \dots, u_m$ une famille de m vecteurs de E .

On appelle *matrice de Gram* de (u) la matrice $G = G(u_1, u_2, \dots, u_m)$, carrée et symétrique d'ordre m , dont le terme général est $g_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. On note $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m)$ le déterminant de cette matrice G . On l'appelle le *déterminant de Gram* des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_m .

1. Montrer que si (u) est liée, alors $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0$. [S]
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant la famille (u) . Soient (ε) une base orthonormée de F et M la matrice de la famille (u) dans cette base.
 - (a) Montrer que la matrice G peut s'écrire $G = {}^T M M$. [S]
 - (b) Montrer que G, M ont même "noyau", puis que G a même rang que la famille (u) . [S]
3. (a) Montrer que les valeurs propres de G sont positives ou nulles (indication : pour toute matrice-colonne X , considérer le produit ${}^T X G X$.) [S]
 - (b) Montrer que chaque valeur propre de G est majorée par $\sum_{j=1}^m \|u_j\|^2$. [S]
4. On suppose que la famille (u) est libre. Soit F le sous-espace de E engendré par u_1, \dots, u_m .
 - (a) Montrer que $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m) > 0$. [S]
 - (b) Montrer que la distance d de x au sous-espace F vérifie $d^2 = \frac{\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m, x)}{\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m)}$ [S]
 - (c) Soient x un vecteur de E , et $p(x)$ sa projection orthogonale sur F .

$$\text{Montrer que } p(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j, \text{ avec } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_m, x \rangle \end{pmatrix} \quad [\text{S}]$$

5. On suppose que (u) est une base de E . Pour tout x de E , les produits scalaires $\langle u_i, x \rangle$ sont appelées les *coordonnées covariantes* de x dans la base (u) . Les composantes de x (au sens habituel) de x dans (u) sont appelées ses *coordonnées contravariantes*. Montrer comment x est déterminé de manière unique par ses coordonnées covariantes, en fonction desquelles on exprimera les composantes de x dans la base (u) . [S]
6. Dans cette question, H est une matrice carrée symétrique d'ordre n , dont les valeurs propres sont toutes supposées positives ou nulles. Montrer qu'il existe au moins une famille v_1, v_2, \dots, v_n de vecteurs de \mathbb{R}^n dont H est la matrice de Gram. (indication : diagonaliser H dans une base orthonormée de \mathbb{R}^n .) [S]

Corrigé du problème

1. Par hypothèse il existe m scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = \vec{0}$.

Pour tout i de $\{1, \dots, m\}$, on a alors $\sum_{j=1}^m \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = 0$.

Autrement dit les vecteurs-colonnes C_1, \dots, C_m de G vérifient $\sum_{j=1}^m \lambda_j C_j = \vec{0}$.

Ainsi G n'est pas inversible. Donc $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0$. [Q]

2. (a) On suppose que F est de dimension r , avec $1 \leq r \leq n$. La matrice M est donc de type $r \times m$, et ${}^T M M$ est de type $m \times m$ (donc de même "format" que G).
Notons m_{ij} le terme d'indice (i, j) de M et n_{ij} celui de ${}^T M$ (donc $n_{ij} = m_{ji}$).

Pour tout j de $\{1, \dots, m\}$, on a donc $u_j = \sum_{i=1}^r m_{ij} \varepsilon_i$.

Alors, pour tous indices i, j de $\{1, \dots, m\}$, on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée et écrire :

$$\langle u_i, u_j \rangle = \sum_{k=1}^r m_{ki} m_{kj} = \sum_{k=1}^r n_{ik} m_{kj}$$

On reconnaît finalement le terme d'indice (i, j) du produit ${}^T M M$.

Conclusion : on a l'égalité matricielle $G = {}^T M M$. [Q]

- (b) Soit X une matrice colonne de hauteur m .

Il faut montrer $MX = 0 \Leftrightarrow {}^T M M X = 0$.

L'implication $MX = 0 \Rightarrow {}^T M M X = 0$ est évidente.

Réciproquement, ${}^T M M X = 0 \Rightarrow {}^T X {}^T M M X = 0 \Rightarrow {}^T (MX) MX = 0$.

Mais ${}^T (MX) MX$ représente le carré de la norme de MX (dans \mathbb{R}^m muni de son produit scalaire canonique). L'égalité ${}^T (MX) MX = 0$ implique donc $MX = 0$.

Ainsi les matrices M et G ont le même noyau.

Puisque elles ont toutes deux m colonnes (elles représentent des morphismes définis sur \mathbb{R}^m) on peut écrire, en vertu du théorème du rang :

$$\text{rg } M = m - \dim \ker M = m - \dim \ker G = \text{rg } G$$

Les matrices M, G ont donc même rang, et le rang de M est celui de la famille (u) .

[Q]

3. (a) Soit X un vecteur propre propre de G pour la valeur propre λ (qui est nécessairement réelle car G est une matrice symétrique à coefficients réels).

On a $\lambda X = GX$ et donc $\lambda \|X\|^2 = \lambda {}^T X X = {}^T X {}^T M M X = {}^T (MX) MX = \|MX\|^2$.

Puisque $\|X\| > 0$, ce résultat prouve que λ est positif ou nul. [Q]

- (b) La quantité $\sum_{j=1}^m \|u_j\|^2$ représente la trace de la matrice G .

Or le polynôme caractéristique de G est scindé (G est diagonalisable) et la somme des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ de G (chacune comptée autant de fois que sa multiplicité) est égale à $\text{tr } G$.

Du fait que les λ_k sont positives ou nulles, on tire alors $\lambda_k \leq \text{tr } G$. [Q]

4. (a) Les vecteurs u_1, \dots, u_m forment une base de F , qui est donc de dimension m .
 Dans ces conditions la matrice M (avec les notations de (2)) est carrée d'ordre m et inversible car elle est la matrice de passage entre les bases (ε) et (u) de F .
 L'égalité $G = {}^T M M$ donne alors $\det G = (\det M)^2$, et donc $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m) > 0$. [Q]

- (b) Soit $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

On a l'égalité $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $x - p(x) \in F^\perp$, $p(x) \in F$, et $d = \|x - p(x)\|$.

Pour chaque u_i , on a $\langle u_i, x \rangle = \langle u_i, x - p(x) \rangle + \langle u_i, p(x) \rangle = \langle u_i, p(x) \rangle$.

Les matrices de Gram $G_1 = G(u_1, \dots, u_m, x)$ et $G_2 = G(u_1, \dots, u_m, p(x))$ sont donc identiques, sauf pour leur coefficient d'indice $(m+1, m+1)$, qui vaut $\|x\|^2$ dans G_1 et $\|p(x)\|^2$ dans G_2 .

Dans le déterminant $\Delta(u_1, \dots, u_m, x)$, on remplace les produits scalaires $\langle u_i, x \rangle$ par $\langle u_i, p(x) \rangle$, et la quantité $\|x\|^2$ par $\|p(x)\|^2 + d^2$.

On utilise ensuite la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne.

$$\begin{aligned} \Delta(u_1, \dots, u_m, x) &= \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle & \langle u_1, x \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle & \langle u_m, x \rangle \\ \langle x, u_1 \rangle & \dots & \langle x, u_m \rangle & \|x\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle & \langle u_1, p(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle & \langle u_m, p(x) \rangle \\ \langle p(x), u_1 \rangle & \dots & \langle p(x), u_m \rangle & \|p(x)\|^2 + d^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle & \langle u_1, p(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle & \langle u_m, p(x) \rangle \\ \langle p(x), u_1 \rangle & \dots & \langle p(x), u_m \rangle & \|p(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle & 0 \\ \langle p(x), u_1 \rangle & \dots & \langle p(x), u_m \rangle & d^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, on reconnaît tout d'abord le déterminant de Gram des vecteurs $u_1, \dots, u_m, p(x)$. Ce déterminant est nul car ces vecteurs sont liés.

Enfin le tout dernier déterminant peut être développé par rapport à sa dernière colonne, et ce développement s'écrit $d^2 \Delta(u_1, \dots, u_m)$.

Conclusion : on a bien l'égalité $d^2 = \frac{\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m, x)}{\Delta(u_1, u_2, \dots, u_m)}$. [Q]

(c) On écrit que $x - p(x)$ est orthogonal aux u_j , ou encore :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \langle u_i, p(x) \rangle = \langle u_i, x \rangle$$

Puisque $p(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j$, ces égalités deviennent :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \sum_{j=1}^m \langle u_i, u_j \rangle \lambda_j = \langle u_i, x \rangle$$

Mais ce système d'équations (aux inconnues λ_j) se traduit matriciellement en :

$$G \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_m, x \rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_m, x \rangle \end{pmatrix}$$

car G est inversible. [Q]

5. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

En effet, on a maintenant $F = E$ et $p(x) = x$ pour tout vecteur x .

La matrice de Gram de u_1, \dots, u_n est carrée d'ordre n et inversible.

Si on pose $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$, les composantes λ_j de x dans la base (u) s'obtiennent en fonction

des produits scalaires $\langle u_j, x \rangle$ en écrivant : $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \end{pmatrix}$ [Q]

6. La matrice H , symétrique réelle, est diagonalisable dans le groupe orthogonal.

Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$H = PDP^{-1} = PD^T P$$

Mais les coefficients diagonaux λ_k de D sont les valeurs propres de H , dont on sait qu'elle sont toutes positives ou nulles.

Si on note Δ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, alors on a l'égalité matricielle $D = \Delta^2 = \Delta^T \Delta$.

On peut donc écrire $H = P \Delta^T \Delta^T P = P \Delta^T (P \Delta) = {}^T N N$, avec $N = {}^T (P \Delta)$.

Avec ces notations, H est la matrice de Gram des vecteurs colonnes v_1, \dots, v_n de N . [Q]