

Familles d'intégrales à paramètres

L'objet de ce problème est d'étudier les fonctions u et v , de la variable réelle x , définies par :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) dt$$

Pour tout (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout t de \mathbb{R}^{+*} on pose $f_{\alpha, \lambda}(t) = e^{-\lambda t} t^\alpha$.

1. Pour quels couples (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha, \lambda}$ est-elle intégrable sur \mathbb{R}^{+*} ? [S]
2. En déduire que les applications u et v sont définies sur \mathbb{R} . Préciser leur parité. [S]
3. Montrer que les applications u et v sont lipschitziennes sur \mathbb{R} . [S]
4. Dans cette question, on va montrer que u et v sont dérivables sur \mathbb{R} .
 - (a) Montrer que l'application $x \mapsto I(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx) dt$ est définie sur \mathbb{R} . [S]
 - (b) Pour tout (x, h) de \mathbb{R}^2 , montrer que $|u(x+h) - u(x) - hI(x)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{3/2} dt$. [S]
 - (c) En déduire que u est dérivable sur \mathbb{R} et que $u'(x) = I(x)$. [S]
 - (d) Faire rapidement la même étude, mais pour la fonction v . [S]

5. Dans cette question, on veut montrer qu'en fait u et v sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , on pose $z(x) = u(x) + iv(x)$.

Pour tout x de \mathbb{R} , montrer qu'on a l'égalité $z'(x) = \frac{-z(x)}{2(x+i)}$ puis conclure. [S]

6. En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, montrer que $u(0) = \sqrt{\pi}$. [S]

7. Dans cette question, on trouve une expression de $u(x)$ et de $v(x)$.

(a) Déterminer la primitive φ qui s'annule en 0 de l'application $x \mapsto \frac{-1}{2(x+i)}$. [S]

(b) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $z(x) = \sqrt{\pi} \exp(\varphi(x))$. [S]

(c) Dans cette question, x est un réel positif ou nul.

Exprimer $\cos\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ à l'aide de radicaux superposés.

En déduire une expression de $u(x)$ et de $v(x)$. [S]

Corrigé du problème

1. Notons que pour tout (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha, \lambda}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} .

D'autre part $f_{\alpha, \lambda} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$.

Ainsi $f_{\alpha, \lambda}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $-\alpha < 1$ (c'est-à-dire $\alpha > -1$).

Ensuite $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_{\alpha, \lambda}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+2} e^{-\lambda t} = 0$ (car $\lambda > 0$).

On en déduit que $f_{\alpha, \lambda}$ est toujours intégrable sur $[1, +\infty[$.

Conclusion : $f_{\alpha, \lambda}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $\alpha > -1$. [Q]

2. Pour tout x de \mathbb{R} , les app^{ns} $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)$ sont continues sur \mathbb{R}^{+*} .

Pour tout x de \mathbb{R} , $\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) \right|$ et $\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) \right|$ sont majorées par $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2}, 1}(t)$.

Or, d'après ce qui précède, on sait que l'application $f_{-\frac{1}{2}, 1}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} .

Pour tout x de \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)$ sont donc intégrables sur \mathbb{R}^{+*} .

Autrement dit : les applications u et v sont définies sur \mathbb{R} .

Enfin, il est clair que u est paire et que v est impaire. [Q]

3. Pour tout a, b de \mathbb{R} , on a $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$ (inégalité des accroissements finis).

On en déduit, pour tout x, y de \mathbb{R} :

$$|u(y) - u(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos(ty) - \cos(tx)| dt \leq |y - x| \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt.$$

(ce calcul est justifié car l'application $f_{\frac{1}{2}, 1} : t \mapsto \sqrt{t} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*}).

On en déduit que l'application u est K -lipschitzienne sur \mathbb{R} , avec $K = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$.

On a le même résultat avec l'application v (grâce à $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$). [Q]

4. (a) Pour tout x de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto -e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

Sur ce même intervalle elle est dominée par l'application intégrable $f_{\frac{1}{2}, 1} : t \mapsto e^{-t} \sqrt{t}$.

L'application $t \mapsto -e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx)$ est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ pour tout x de \mathbb{R} .

Il en résulte que l'application $x \mapsto I(x)$ est définie sur \mathbb{R} . [Q]

(b) Pour tout (x, h) de \mathbb{R}^2 :

$$u(x+h) - u(x) - hI(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(t(x+h)) - \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) + h e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx) \right) dt.$$

$$\text{Ainsi } |u(x+h) - u(x) - hI(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left| \cos(tx+th) - \cos(tx) + th \sin(tx) \right| dt.$$

$$\text{Or, } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |\cos b - \cos a + (b-a) \sin a| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \text{ (Taylor-Lagrange).}$$

Ainsi $\left| \cos(tx + th) - \cos(tx) + th \sin(tx) \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2}$ et finalement :

Pour tout (x, h) de \mathbb{R}^2 , $|u(x + h) - u(x) - hI(x)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{3/2} dt$.

(le calcul final est justifié par le fait que l'application $f_{3/2,1}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+). [Q]

(c) Le résultat précédent montre que $u(x + h) - u(x) - hI(x) = o(h)$ quand $h \rightarrow 0$.

Cela signifie que l'application u est dérivable en x et que $u'(x) = I(x)$.

Ainsi, pour tout x de \mathbb{R} : $u'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) dt \right) = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx) dt$. [Q]

(d) On procède de la même manière que dans la question précédente.

Tout d'abord, on vérifie que $x \mapsto J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \cos(tx) dt$ est définie sur \mathbb{R} .

Ensuite on prouve l'inégalité $|v(x + h) - v(x) - hJ(x)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{3/2} dt$.

Pour cela, on utilise Taylor-Lagrange : $|\sin b - \sin a - (b - a) \cos a| \leq \frac{(b - a)^2}{2}$.

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \cos(tx) dt$. [Q]

5. D'après (4), $x \mapsto z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt$ est dérivable sur \mathbb{R} et $z'(x) = I(x) + iJ(x)$.

Autrement dit, pour tout x de \mathbb{R} :

$$z'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \sin(tx) dt + i \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} \cos(tx) dt = i \int_0^{+\infty} e^{t(ix-1)} \sqrt{t} dt.$$

On procède alors à une intégration par parties sur un segment $[a, b]$, avec $0 < a < b$:

$$i \int_a^b e^{t(ix-1)} \sqrt{t} dt = \frac{1}{x+i} \left[e^{t(ix-1)} \sqrt{t} \right]_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{2(x+i)} \int_a^b \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}} dt.$$

Mais $|e^{t(ix-1)}| = e^{-t}$ donc $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{b(ix-1)} \sqrt{b} = 0$. De même $\lim_{a \rightarrow 0} e^{a(ix-1)} \sqrt{a} = 0$.

Ainsi, par double passage à la limite : $i \int_0^{+\infty} e^{t(ix-1)} \sqrt{t} dt = - \frac{1}{2(x+i)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}} dt$.

Cette égalité s'écrit, pour tout x de \mathbb{R} : $z'(x) = \frac{-z(x)}{2(x+i)}$.

Par récurrence sur k , montron que l'application z est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} .

Cela est vrai si $k = 0$ (car z est dérivable donc continue sur \mathbb{R}).

Si cela est vrai au rang k , alors l'égalité $z'(x) = \frac{-z(x)}{2(x+i)}$ montre que z' est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} donc que z est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur \mathbb{R} .

Ainsi, l'application z (donc les applications $u = \operatorname{Re} z$ et $v = \operatorname{Im} z$) sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . [Q]

6. On va utiliser le changement de variable $w = \sqrt{t}$ sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$.

$$\text{On a } w = \sqrt{t} \text{ donc } dw = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \text{ donc } \int_a^b \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-w^2} dw.$$

$$\text{Et quand } \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ on obtient } u(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}. \quad [\text{Q}]$$

7. (a) Pour tout x de \mathbb{R} , on a $\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{i-x}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$.

$$\text{On en déduit } \varphi(x) = \int_0^x \frac{-dt}{2(t+i)} = -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} i \arctan x. \quad [\text{Q}]$$

(b) Pour tout x de \mathbb{R} , posons $Z(x) = z(x) \exp(-\varphi(x))$.

L'application Z est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$Z'(x) = (z'(x) - \varphi'(x)z(x)) \exp(-\varphi(x)) = \left(z'(x) + \frac{z(x)}{2(x+i)} \right) \exp(-\varphi(x)) = 0.$$

Ainsi l'application Z est constante sur \mathbb{R} . Or $Z(0) = z(0) \exp(-\varphi(0))$.

On sait que $u(0) = \sqrt{\pi}$ et $v(0) = 0$ donc $z(0) = \sqrt{\pi}$, et $\varphi(0) = 0$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, Z(x) = Z(0) = \sqrt{\pi}$.

Autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R} : z(x) = \sqrt{\pi} \exp \varphi(x)$. [Q]

(c) Soit x dans \mathbb{R}^+ , et posons $\theta = \frac{1}{2} \arctan x$ (donc $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$).

$$\text{On sait que } 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{On en déduit } \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{2\sqrt{1+x^2}}}.$$

$$\text{Enfin } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2\sqrt{1+x^2}}}.$$

$$\text{On sait que } z(x) = \sqrt{\pi} = \exp \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{-1/4}} \exp\left(\frac{1}{2} i \arctan x\right).$$

On en déduit, pour tout $x \geq 0$:

$$u(x) = \operatorname{Re} z(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{2\sqrt{1+x^2}}}.$$

$$\text{Cela se simplifie en : } u(x) = \sqrt{\frac{\pi(\sqrt{1+x^2} + 1)}{2(1+x^2)}}.$$

$$\text{De même } v(x) = \operatorname{Im} z(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2\sqrt{1+x^2}}}.$$

$$\text{Finalement, pour tout } x \geq 0 : v(x) = \sqrt{\frac{\pi(\sqrt{1+x^2} - 1)}{2(1+x^2)}}. \quad [\text{Q}]$$