Familles d'intégrales à paramètres

L'objet de ce problème est d'étudier les fonctions u et v, de la variable réelle x, définies par :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ on pose $f_{\alpha,\lambda}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{\alpha}$.

1. Pour quels couples (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha,\lambda}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$? [S]
2. En déduire que les applications u et v sont définies sur $\mathbb{R}$. Préciser leur parité. [S]
3. Montrer que les applications u et v sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. [S]
4. Dans cette question, on va montrer que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto I(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$. [S]
   (b) Pour tout (x, h) de $\mathbb{R}^2$, montrer que $|u(x+h) - u(x) - hI(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{3/2}\,\mathrm{d}t$. [S]
   (c) En déduire que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u'(x) = I(x)$. [S]
   (d) Faire rapidement la même étude, mais pour la fonction v. [S]
5. Dans cette question, on veut montrer qu'en fait u et v sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on pose $z(x) = u(x) + iv(x)$.
   Pour tout x de $\mathbb{R}$, montrer qu'on a l'égalité $z'(x) = \dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$ puis conclure. [S]
6. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, montrer que $u(0) = \sqrt{\pi}$. [S]
7. Dans cette question, on trouve une expression de $u(x)$ et de $v(x)$.
   (a) Déterminer la primitive φ qui s'annule en 0 de l'application $x \mapsto \dfrac{-1}{2(x+i)}$. [S]
   (b) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z(x) = \sqrt{\pi}\exp(\varphi(x))$. [S]
   (c) Dans cette question, x est un réel positif ou nul.
   Exprimer $\cos\Big(\frac{1}{2}\arctan(x)\Big)$ et $\sin\Big(\frac{1}{2}\arctan(x)\Big)$ à l'aide de radicaux superposés.
   En déduire une expression de $u(x)$ et de $v(x)$. [S]

Corrigé du problème

1. Notons que pour tout (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ l'application $f_{\alpha,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   D'autre part $f_{\alpha,\lambda} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.

   Ainsi $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $-\alpha < 1$ (c'est-à-dire $\alpha > -1$).

   Ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_{\alpha,\lambda}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ (car $\lambda > 0$).

   On en déduit que $f_{\alpha,\lambda}$ est toujours intégrable sur $[1, +\infty[$.

   Conclusion : $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha > -1$. [Q]

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, les app$^{\text{ns}}$ $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)$ et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\right|$ et $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\right|$ sont majorées par $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$.

   Or, d'après ce qui précède, on sait que l'application $f_{-\frac{1}{2},1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Pour tout x de $\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)$ et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)$ sont donc intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Autrement dit : les applications u et v sont définies sur $\mathbb{R}$.

   Enfin, il est clair que u est paire et que v est impaire. [Q]

3. Pour tout a, b de $\mathbb{R}$, on a $|\cos b - \cos a| \leqslant |b - a|$ (inégalité des accroissements finis).

   On en déduit, pour tout x, y de $\mathbb{R}$:

   $$|u(y) - u(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,|\cos(ty) - \cos(tx)|\,\mathrm{d}t \leqslant |y - x| \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (ce calcul est justifié car l'application $f_{\frac{1}{2},1} : t \mapsto \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

   On en déduit que l'application u est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   On a le même résultat avec l'application v (grâce à $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$). [Q]

4. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   Sur ce même intervalle elle est dominée par l'application intégrable $f_{\frac{1}{2},1} : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}$.

   L'application $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   Il en résulte que l'application $x \mapsto I(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. [Q]

   (b) Pour tout (x, h) de $\mathbb{R}^2$:

   $$u(x+h) - u(x) - hI(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(t(x+h)) - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx) + h\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

   Ainsi $|u(x+h) - u(x) - hI(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\Big|\cos(tx + th) - \cos(tx) + th\sin(tx)\Big|\,\mathrm{d}t$.

   Or, $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos b - \cos a + (b - a)\sin a| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}$ (Taylor-Lagrange).

Ainsi $\Bigl|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)\Bigr| \leqslant \dfrac{t^2h^2}{2}$ et finalement :

Pour tout (x,h) de $\mathbb{R}^2$, $|u(x+h)-u(x)-hI(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{3/2}\,\mathrm{d}t$.

(le calcul final est justifié par le fait que l'application $f_{3/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$). [Q]

(c) Le résultat précédent montre que $u(x+h)-u(x)-hI(x)=\mathrm{o}(h)$ quand $h\to 0$.

Cela signifie que l'application u est dérivable en x et que $u'(x)=I(x)$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$: $u'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\,\mathrm{d}t\Bigr)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$. [Q]

(d) On procède de la même manière que dans la question précédente.

Tout d'abord, on vérifie que $x\mapsto J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite on prouve l'inégalité $|v(x+h)-v(x)-hJ(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{3/2}\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on utilise Taylor-Lagrange : $|\sin b-\sin a-(b-a)\cos a| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2}$.

Il en résulte : $\forall x\in\mathbb{R},\ v'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\,\mathrm{d}t\Bigr)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$. [Q]

5. D'après (4), $x\mapsto z(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'(x)=I(x)+iJ(x)$.

Autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$z'(x)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}t+i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t=i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

On procède alors à une intégration par parties sur un segment $[a,b]$, avec $0<a<b$:

$$i\int_a^b \mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+i}\Bigl[\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\Bigr]_{t=a}^{t=b}-\frac{1}{2(x+i)}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Mais $\bigl|\mathrm{e}^{t(ix-1)}\bigr|=\mathrm{e}^{-t}$ donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{b(ix-1)}\sqrt{b}=0$. De même $\displaystyle\lim_{a\to 0}\mathrm{e}^{a(ix-1)}\sqrt{a}=0$.

Ainsi, par double passage à la limite : $i\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t(ix-1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2(x+i)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Cette égalité s'écrit, pour tout x de $\mathbb{R}$: $z'(x)=\dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$.

Par récurrence sur k, montron que l'application z est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Celà est vrai si $k=0$ (car z est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$).

Si celà est vrai au rang k, alors l'égalité $z'(x)=\dfrac{-z(x)}{2(x+i)}$ montre que z' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ donc que z est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'application z (donc les applications $u=\operatorname{Re} z$ et $v=\operatorname{Im} z$) sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. [Q]

6. On va utiliser le changement de variable $w = \sqrt{t}$ sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$.

   On a $w = \sqrt{t}$ donc $\mathrm{d}w = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$ donc $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w$.

   Et quand $\begin{cases} a \to 0 \\ b \to +\infty \end{cases}$ on obtient $u(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w = \sqrt{\pi}$. [Q]

7. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\dfrac{-1}{2(x+i)} = \dfrac{i-x}{2(x^2+1)} = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{i}{2(x^2+1)}$.

   On en déduit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{-\,\mathrm{d}t}{2(t+i)} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\,i\arctan x$. [Q]

   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, posons $Z(x) = z(x)\exp(-\varphi(x))$.

   L'application Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $Z'(x) = (z'(x) - \varphi'(x)z(x))\exp(-\varphi(x)) = \Big(z'(x) + \dfrac{z(x)}{2(x+i)}\Big)\exp(-\varphi(x)) = 0.$

   Ainsi l'application Z est constante sur $\mathbb{R}$. Or $Z(0) = z(0)\exp(-\varphi(0))$.

   On sait que $u(0) = \sqrt{\pi}$ et $v(0) = 0$ donc $z(0) = \sqrt{\pi}$, et $\varphi(0) = 0$.

   On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R},\ Z(x) = Z(0) = \sqrt{\pi}$.

   Autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R}$: $z(x) = \sqrt{\pi}\exp\varphi(x)$. [Q]

   (c) Soit x dans $\mathbb{R}^+$, et posons $\theta = \dfrac{1}{2}\arctan x$ (donc $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$).

   On sait que $2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   On en déduit $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

   Enfin $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

   On sait que $z(x) = \sqrt{\pi} = \exp\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{-1/4}}\exp\Big(\dfrac{1}{2}\,i\arctan x\Big)$.

   On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

   $u(x) = \operatorname{Re} z(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\cos\Big(\dfrac{1}{2}\arctan x\Big) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

   Cela se simplifie en : $u(x) = \sqrt{\dfrac{\pi(\sqrt{1+x^2}+1)}{2(1+x^2)}}$.

   De même $v(x) = \operatorname{Im} z(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sin\Big(\dfrac{1}{2}\arctan x\Big) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

   Finalement, pour tout $x \geqslant 0$: $v(x) = \sqrt{\dfrac{\pi(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(1+x^2)}}$. [Q]