

Résolution itérative d'un système linéaire

D'après l'épreuve de Maths 3 du concours E3A, option PC, année 1999

La lettre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Un élément A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est noté $A = (a_{ij})$.

On identifie les vecteurs de \mathbb{K}^p et les matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On rappelle que pour toute norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - B\| = 0$.

Les coefficients de la matrice limite B sont alors les limites des coefficients de la matrice A_n .

Partie I

1. Montrer qu'on définit une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ en posant $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |a_{ij}|$ [S]
2. Montrer que si le produit AB est possible, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. [S]
3. Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ les valeurs propres de A dans \mathbb{C} et $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda_i|$.
 - (a) Montrer que pour i dans $\{1, \dots, p\}$ et k dans \mathbb{N}^* , $|\lambda_i|^k \leq \|A^k\|$. [S]
 - (b) En déduire que si A est diagonalisable alors : $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$. [S]

4. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et b un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.

On définit une suite $(x^{(n)})$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par :

$$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}N x^{(n)} + M^{-1}b$$

- (a) Montrer que l'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}N x + M^{-1}b$. [S]
- (b) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M , N , $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$. [S]
- (c) Donner une condition suffisante pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x . [S]

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in \{2, \dots, p\}, a_{i,i-1} = -1 \\ \forall i \in \{1, \dots, p-1\}, a_{i,i-1} = -1 \end{cases}$, les autres coefficients étant nuls.

1. I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.
Trouver une relation entre D_p, D_{p-1}, D_{p-2} et λ (on pose $D_0 = 1$, et $D_1 = 2 - \lambda$). [S]
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire a priori de ses valeurs propres ? [S]
3. Soit λ une valeur propre de la matrice A . Montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$ en utilisant $\|A - 2I_p\|$. [S]
4. On pose $2 - \lambda = 2 \cos \theta$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.
Calculer D_p en fonction de p et θ . Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. [S]
5. En déduire les valeurs propres de A . [S]



Partie III

Dans la décomposition $A = M - N$ évoquée en **I-4**, A est la matrice de la partie **II** et on pose $M = 2I_p$. Ainsi $N = 2I_p - A$. On note $J = M^{-1}N = I_p - \frac{1}{2}A$.

1. Pour tout n de \mathbb{N} , expliciter $x^{(n+1)}$ en fonction de $x^{(n)}$ et de b . [S]
2. Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$. [S]
3. La suite $(x^{(n)})$ est-elle convergente? [S]
4. Montrer que $1 - \rho(J) \leq \frac{\pi^2}{2p^2}$. [S]
5. Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas? [S]

Corrigé du problème

Partie I

1. On se donne ici deux entiers positifs p et q .

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.

– $\|A\| \geq 0$. D'autre part $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall i, \sum_{j=1}^q |a_{ij}| = 0 \Rightarrow \forall (i, j), a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$.

– Pour tout λ : $\|\lambda A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |\lambda a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq p} \left(|\lambda| \sum_{j=1}^q |a_{ij}| \right) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|$.

– L'inégalité $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$ donne : $\sum_{j=1}^q |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^q |a_{ij}| + \sum_{j=1}^q |b_{ij}|$

On en déduit $\sum_{j=1}^q |a_{ij} + b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|$, puis $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

– Conclusion : l'application $A \rightarrow \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

[Q]

2. On se donne les matrices $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk})$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

La matrice $C = AB = (c_{ik})$ est élément de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} b_{jk} \Rightarrow \sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^q |a_{ij}| |b_{jk}|, \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^q \left(|a_{ij}| \sum_{k=1}^r |b_{jk}| \right)$$

On en déduit $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^q \left(|a_{ij}| \|B\| \right)$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \left(\sum_{j=1}^q |a_{ij}| \right) \|B\|$.

Une nouvelle majoration donne $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \|A\| \|B\|$ et finalement $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. [Q]

3. (a) Soit X_i un vecteur propre de A , pour la valeur propre λ_i .

On a $AX_i = \lambda_i X_i$, et pour tout entier $k \geq 1$, $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$.

On en déduit $\|A^k X_i\| = |\lambda_i|^k \|X_i\|$. Or $\|A^k X_i\| \leq \|A^k\| \|X_i\|$.

Puisque le vecteur X_i est non nul, il en découle : $|\lambda_i|^k \leq \|A^k\|$. [Q]

- (b) – On suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

Il existe un indice i tel que $\rho(A) = |\lambda_i|$. Mais l'hypothèse sur A et la question précédente impliquent $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_i|^k = 0$, c'est-à-dire $|\lambda_i| < 1$, et donc $\rho(A) < 1$.

– Réciproquement, on suppose $\rho(A) < 1$.

Cela signifie que chaque valeur propre λ_i vérifie $|\lambda_i| < 1$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = 0$.

On sait que la matrice A est diagonalisable : il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier $k \geq 1$, les seuls coefficients éventuellement non nuls de D^k sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les λ_i^k .

Par hypothèse, et pour tout i , $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$. On en déduit $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$.

D'autre part, $A^k = PD^kP^{-1}$ et on sait que $\|A^k\| = \|PD^kP^{-1}\| \leq \|P\| \|D^k\| \|P^{-1}\|$.

Ainsi $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$ puis $\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^k\| = 0$. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ et enfin $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

[Q]

4. (a) $Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ [Q]

(b) Les égalités $\begin{cases} x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b \\ x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{cases}$ donnent $x^{(n+1)} - x = M^{-1}N(x^{(n)} - x)$.

Une récurrence évidente donne alors, pour tout n : $x^{(n)} - x = (M^{-1}N)^n(x^{(0)} - x)$.

[Q]

(c) Pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x , il suffit que la suite des puissances successives de la matrice diagonalisable $M^{-1}N$ converge vers la matrice nulle.

On sait que cela est réalisé si $\rho(M^{-1}N) < 1$. [Q]

Partie II

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On développe D_p par rapport à sa première ligne :

$$D_p = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)D_{p-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Le dernier déterminant, qui est d'ordre $p-1$ est en fait égal à D_{p-2} (il suffit pour cela de le développer par rapport à sa première ligne.)

On trouve donc $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$.

D'autre part, $D_0 = 1$, $D_1 = 2-\lambda$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)D_1 - D_0$.

L'égalité $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$ est donc valable pour tout $p \geq 2$. [Q]

2. La matrice A est symétrique à coefficients réels : elle est donc diagonalisable dans \mathbb{R} . Plus précisément, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$. [Q]

3. Notons d'abord que pour tout λ , $\|A - \lambda I_p\| \leq 2 + |\lambda|$. En particulier : $\|A - 2I_p\| \leq 2$. Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

$$\begin{aligned} \lambda u &= Au \Rightarrow (\lambda - 2)u = (A - 2I_p)u \Rightarrow |\lambda - 2| \|u\| \\ &= \|(A - 2I_p)u\| \leq \|A - 2I_p\| \|u\| \leq 2 \|u\| \end{aligned}$$

Puisque $u \neq 0$, on en déduit effectivement l'inégalité $|\lambda - 2| \leq 2$, c'est-à-dire $0 \leq \lambda \leq 4$.

[Q]

4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a l'égalité $D_p - 2 \cos \theta D_{p-1} + D_{p-2} = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette récurrence est $\mathcal{C} : t^2 - 2 \cos \theta t + 1 = 0$.

Cette équation s'écrit $(t - e^{i\theta})(t - e^{-i\theta}) = 0$: ses racines sont donc $t_1 = e^{i\theta}$ et $t_2 = e^{-i\theta}$.

- Si $\theta = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 0$:
On a $t_1 = t_2 = 1$. Il existe deux scalaires α et β tels que pour tout p on ait $D_p = \alpha + p\beta$.
Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = 1 + p$.
- Si $\theta = \pi$, c'est-à-dire si $\lambda = 4$:
On a $t_1 = t_2 = -1$.
Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = (\alpha + p\beta)(-1)^p$.
Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = -2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = (1 + p)(-1)^p$.
- Si $0 < \theta < \pi$, c'est-à-dire si $0 < \lambda < 4$:
Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = \alpha \cos(p\theta) + \beta \sin(p\theta)$.
On a $D_0 = \alpha = 1$ et $D_1 = \cos \theta + \beta \sin \theta = 2 \cos \theta$, donc $\beta = \cotan \theta$.
On en déduit, pour tout entier p : $D_p = \cos(p\theta) + (\cotan \theta) \sin(p\theta) = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin \theta}$

[Q]

5. $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$ est une valeur propre de A si et seulement si $D_p = 0$.
Compte tenu des résultats précédents, cela n'est possible que si $0 < \theta < \pi$ et pour une valeur de θ vérifiant $\sin(p+1)\theta = 0$.
Cela équivaut à $\theta = \frac{k\pi}{p+1}$ avec $1 \leq k \leq p$.
On peut donc conclure :
Les valeurs propres de A sont les $\lambda_k = 2(1 - \cos \theta_k) = 4 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}$,
(avec $\theta_k = \frac{k\pi}{p+1}$ et $1 \leq k \leq p$).
On remarque que les p valeurs propres de A sont deux à deux distinctes. [Q]

Partie III

1. $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = Jx^{(n)} + M^{-1}b = (I_p - \frac{1}{2}A)x^{(n)} + \frac{1}{2}b$ [Q]
2. Pour tout vecteur x , $Jx = \lambda x \Leftrightarrow (2I_p - A)x = 2\lambda x \Leftrightarrow Ax = 2(1 - \lambda)x$
 λ est donc une valeur propre de J si et seulement si $2(1 - \lambda)$ est une valeur propre de A , c'est-à-dire si et seulement si $2(1 - \lambda) = 2(1 - \cos \theta_k)$.
Conclusion : Les valeurs propres de A sont les $\mu_k = \cos \theta_k$, avec $\theta_k = \frac{k\pi}{p+1}$ et $1 \leq k \leq p$.
Le minimum des $|\mu_k|$ est atteint pour $k = 1$ et $k = p$.
On en déduit : $\rho(J) = |\mu_1| = \cos \frac{\pi}{p+1}$. [Q]
3. La réponse est oui, car $\rho(J) < 1$. [Q]
4. On utilise l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
On en déduit $1 - \rho(J) = 1 - \cos \frac{\pi}{p+1} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(p+1)} \leq \frac{\pi^2}{2(p+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{2p^2}$ [Q]
5. La vitesse de convergence de la suite $(x^{(n)})$ est comparable à celle d'une suite géométrique de raison $\rho(J)$. Pour de grandes valeurs de p , on voit que $\rho(J)$ est très proche de 1. La seule chose qu'on peut alors prévoir est que la méthode proposée n'est pas très efficace... [Q]