Résolution itérative d'un système linéaire

D'après l'épreuve de Maths 3 du concours E3A, option PC, année 1999

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est noté $A = (a_{ij})$.

On identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et les matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On rappelle que pour toute norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - B\| = 0$.

Les coefficients de la matrice limite B sont alors les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I

1. Montrer qu'on définit une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ en posant $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le p} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ [S]
2. Montrer que si le produit AB est possible, $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$. [S]
3. Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on note $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ et $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le p} |\lambda_i|$.
   (a) Montrer que pour i dans $\{1,\ldots,p\}$ et k dans $\mathbb{N}^*$, $|\lambda_i|^k \le \left\|A^k\right\|$. [S]
   (b) En déduire que si A est diagonalisable alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$. [S]
4. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et b un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
   On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.
   On définit une suite $(x^{(n)})$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par :
   $$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b$$
   (a) Montrer que l'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. [S]
   (b) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N, $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$. [S]
   (c) Donner une condition suffisante pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x. [S]

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} \forall i \in \{1,\ldots,p\}, a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in \{2,\ldots,p\}, a_{i,i-1} = -1 \\ \forall i \in \{1,\ldots,p-1\}, a_{i,i-1} = -1 \end{cases}$, les autres coefficients étant nuls.

1. I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.
   Trouver une relation entre D_p, D_{p-1}, D_{p-2} et λ (on pose $D_0 = 1$, et $D_1 = 2 - \lambda$). [S]
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire à priori de ses valeurs propres ? [S]
3. Soit λ une valeur propre de la matrice A. Montrer que $|\lambda - 2| \le 2$ en utilisant $\|A - 2I_p\|$. [S]
4. On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, avec $0 \le \theta \le \pi$.
   Calculer D_p en fonction de p et θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. [S]
5. En déduire les valeurs propres de A. [S]

Partie III

Dans la décomposition $A = M - N$ évoquée en **I-4**, A est la matrice de la partie **II** et on pose $M = 2I_p$. Ainsi $N = 2I_p - A$. On note $J = M^{-1}N = I_p - \frac{1}{2}A$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, expliciter $x^{(n+1)}$ en fonction de $x^{(n)}$ et de b. [S]
2. Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$. [S]
3. La suite $(x^{(n)})$ est-elle convergente ? [S]
4. Montrer que $1 - \rho(J) \leq \dfrac{\pi^2}{2p^2}$. [S]
5. Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas ? [S]

Corrigé du problème

Partie I

1. On se donne ici deux entiers positifs p et q.
   Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
   - $\|A\| \geq 0$. D'autre part $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall i, \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| = 0 \Rightarrow \forall (i,j), a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$.
   - Pour tout λ : $\|\lambda A\| = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{q} |\lambda a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq p} \Big(|\lambda| \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\Big) = |\lambda| \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| = |\lambda|\, \|A\|$.
   - L'inégalité $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$ donne : $\sum_{j=1}^{q} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{q} |b_{ij}|$
     On en déduit $\sum_{j=1}^{q} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|$, puis $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
   - Conclusion : l'application $A \to \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

   [Q]
2. On se donne les matrices $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk})$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
   La matrice $C = AB = (c_{ik})$ est élément de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
   $c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \Rightarrow \sum_{k=1}^{r} |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\,|b_{jk}|$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{r} |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^{q}\Big(|a_{ij}| \sum_{k=1}^{r} |b_{jk}|\Big)$
   On en déduit $\sum_{k=1}^{r} |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^{q}\Big(|a_{ij}|\,\|B\|\Big)$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{r} |c_{ik}| \leq \Big(\sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\Big)\|B\|$.
   Une nouvelle majoration donne $\sum_{k=1}^{r} |c_{ik}| \leq \|A\|\,\|B\|$ et finalement $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$. [Q]
3. (a) Soit X_i un vecteur propre de A, pour la valeur propre λ_i.
   On a $AX_i = \lambda_i X_i$, et pour tout entier $k \geq 1$, $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$.
   On en déduit $\|A^k X_i\| = |\lambda_i|^k \|X_i\|$. Or $\|A^k X_i\| \leq \|A^k\|\,\|X_i\|$.
   Puisque le vecteur X_i est non nul, il en découle : $|\lambda_i|^k \leq \|A^k\|$. [Q]

   (b) – On suppose que $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.
   Il existe un indice i tel que $\rho(A) = |\lambda_i|$. Mais l'hypothèse sur A et la question précédente impliquent $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_i|^k = 0$, c'est-à-dire $|\lambda_i| < 1$, et donc $\rho(A) < 1$.
   – Réciproquement, on suppose $\rho(A) < 1$.
   Cela signifie que chaque valeur propre λ_i vérifie $|\lambda_i| < 1$ et donc $\lim_{k\to+\infty} \lambda_i^k = 0$.
   On sait que la matrice A est diagonalisable : il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   Pour tout entier $k \geq 1$, les seuls coefficients éventuellement non nuls de D^k sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les λ_i^k.

Par hypothèse, et pour tout i, $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0$. On en déduit $\lim_{k\to\infty} D^k = 0$.
D'autre part, $A^k = PD^kP^{-1}$ et on sait que $\|A^k\| = \|PD^kP^{-1}\| \leq \|P\|\,\|D^k\|\,\|P^{-1}\|$.
Ainsi $\lim_{k\to\infty} D^k = 0$ puis $\lim_{k\to\infty} \|D^k\| = 0$. Donc $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$ et enfin $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$
[Q]

4. (a) $Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ [Q]
   (b) Les égalités $\begin{cases} x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b \\ x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{cases}$ donnent $x^{(n+1)} - x = M^{-1}N(x^{(n)} - x)$.
   Une récurrence évidente donne alors, pour tout n : $x^{(n)} - x = (M^{-1}N)^n(x^{(0)} - x)$.
   [Q]
   (c) Pour que la suite $(x^{(n)})$ converge vers x, il suffit que la suite des puissances successives de la matrice diagonalisable $M^{-1}N$ converge vers la matrice nulle.
   On sait que cela est réalisé si $\rho(M^{-1}N) < 1$. [Q]

Partie II

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On développe D_p par rapport à sa première ligne :
$$D_p = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)D_{p-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
Le dernier déterminant, qui est d'ordre $p-1$ est en fait égal à D_{p-2} (il suffit pour cela de le développer par rapport à sa première ligne.)
On trouve donc $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$.
D'autre part, $D_0 = 1$, $D_1 = 2-\lambda$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)D_1 - D_0$.
L'égalité $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$ est donc valable pour tout $p \geq 2$. [Q]
2. La matrice A est symétrique à coefficients réels : elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$. [Q]
3. Notons d'abord que pour tout λ, $\|A - \lambda I_p\| \leq 2 + |2-\lambda|$. En particulier : $\|A - 2I_p\| \leq 2$.
Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.
$$\begin{aligned} \lambda u &= Au \Rightarrow (\lambda-2)u = (A-2I_p)u \Rightarrow |\lambda-2|\,\|u\| \\ &= \|(A-2I_p)u\| \leq \|A-2I_p\|\,\|u\| \leq 2\,\|u\| \end{aligned}$$
Puisque $u \neq 0$, on en déduit effectivement l'inégalité $|\lambda - 2| \leq 2$, c'est-à-dire $0 \leq \lambda \leq 4$.
[Q]
4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a l'égalité $D_p - 2\cos\theta D_{p-1} + D_{p-2} = 0$.
L'équation caractéristique associée à cette récurrence est $\mathcal{C}$: $t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$.
Cette équation s'écrit $(t - \mathrm{e}^{i\theta})(t - \mathrm{e}^{-i\theta}) = 0$: ses racines sont donc $t_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $t_2 = \mathrm{e}^{-i\theta}$.

- Si $\theta = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 0$:
  On a $t_1 = t_2 = 1$. Il existe deux scalaires α et β tels que pour tout p on ait $D_p = \alpha + p\beta$.
  Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = 1 + p$.
- Si $\theta = \pi$, c'est-à-dire si $\lambda = 4$:
  On a $t_1 = t_2 = -1$.
  Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = (\alpha + p\beta)(-1)^p$.
  Puisque $D_0 = 1$ et $D_1 = -2$, on trouve $\alpha = \beta = 1$. Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = (1 + p)(-1)^p$.
- Si $0 < \theta < \pi$, c'est-à-dire si $0 < \lambda < 4$:
  Il existe deux scalaires α, β tels que pour tout p : $D_p = \alpha\cos(p\theta) + \beta\sin(p\theta)$.
  On a $D_0 = \alpha = 1$ et $D_1 = \cos\theta + \beta\sin\theta = 2\cos\theta$, donc $\beta = \operatorname{cotan}\theta$.
  On en déduit, pour tout entier p : $D_p = \cos(p\theta) + (\operatorname{cotan}\theta)\sin(p\theta) = \dfrac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta}$

[Q]

5. $\lambda = 2(1 - \cos\theta)$ est une valeur propre de A si et seulement si $D_p = 0$.
   Compte tenu des résultats précédents, cela n'est possible que si $0 < \theta < \pi$ et pour une valeur de θ vérifiant $\sin(p+1)\theta = 0$.
   Cela équivaut à $\theta = \dfrac{k\pi}{p+1}$ avec $1 \le k \le p$.
   On peut donc conclure :
   Les valeurs propres de A sont les $\lambda_k = 2(1 - \cos\theta_k) = 4\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}$,
   (avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{p+1}$ et $1 \le k \le p$.)
   On remarque que les p valeurs propres de A sont deux à deux distinctes. [Q]

Partie III

1. $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = Jx^{(n)} + M^{-1}b = (I_p - \frac{1}{2}A)x^{(n)} + \frac{1}{2}b$ [Q]
2. Pour tout vecteur x, $Jx = \lambda x \Leftrightarrow (2I_p - A)x = 2\lambda x \Leftrightarrow Ax = 2(1-\lambda)x$
   λ est donc une valeur propre de J si et seulement si $2(1-\lambda)$ est une valeur propre de A, c'est-à-dire si et seulement si $2(1-\lambda) = 2(1 - \cos\theta_k)$.
   Conclusion : Les valeurs propres de A sont les $\mu_k = \cos\theta_k$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{p+1}$ et $1 \le k \le p$.
   Le minimum des $|\mu_k|$ est atteint pour $k = 1$ et $k = p$.
   On en déduit : $\rho(J) = |\mu_1| = \cos\dfrac{\pi}{p+1}$. [Q]
3. La réponse est oui, car $\rho(J) < 1$. [Q]
4. On utilise l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \le |x|$.
   On en déduit $1 - \rho(J) = 1 - \cos\dfrac{\pi}{p+1} = 2\sin^2\dfrac{\pi}{2(p+1)} \le \dfrac{\pi^2}{2(p+1)^2} \le \dfrac{\pi^2}{2p^2}$ [Q]
5. La vitesse de convergence de la suite $(x^{(n)})$ est comparable à celle d'une suite géométrique de raison $\rho(J)$. Pour de grandes valeurs de p, on voit que $\rho(J)$ est très proche de 1. La seule chose qu'on peut alors prévoir est que la méthode proposée n'est pas très efficace... [Q]