

## Résolution itérative d'un système linéaire

D'après l'épreuve de Maths 3 du concours E3A, option PC, année 1999

La lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  est noté  $A = (a_{ij})$ .

On identifie les vecteurs de  $\mathbb{K}^p$  et les matrices de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .

On rappelle que pour toute norme sur  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - B\| = 0$ .

Les coefficients de la matrice limite  $B$  sont alors les limites des coefficients de la matrice  $A_n$ .

### Partie I

1. Montrer qu'on définit une norme sur  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  en posant  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |a_{ij}|$ . [S]
2. Montrer que si le produit  $AB$  est possible,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . [S]
3. Si  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on note  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$  les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda_i|$ .
  - (a) Montrer que pour  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  et  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $|\lambda_i|^k \leq \|A^k\|$ . [S]
  - (b) En déduire que si  $A$  est diagonalisable alors :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ . [S]

4. Soient  $A$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $b$  un élément de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .

On considère une méthode de résolution approchée de l'équation  $Ax = b$ , où  $b$  est donné et  $x$  est l'inconnue. On décompose la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - N$ , où  $M$  et  $N$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , avec  $M$  inversible et  $M^{-1}N$  diagonalisable.

On définit une suite  $(x^{(n)})$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  par :

$$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}N x^{(n)} + M^{-1}b$$

- (a) Montrer que l'équation  $Ax = b$  équivaut à  $x = M^{-1}N x + M^{-1}b$ . [S]
- (b) Exprimer  $x^{(n)}$  en fonction de  $M$ ,  $N$ ,  $x^{(0)}$  et de la solution  $x$  de l'équation  $Ax = b$ . [S]
- (c) Donner une condition suffisante pour que la suite  $(x^{(n)})$  converge vers  $x$ . [S]

### Partie II

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que  $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in \{2, \dots, p\}, a_{i,i-1} = -1 \\ \forall i \in \{1, \dots, p-1\}, a_{i,i-1} = -1 \end{cases}$ , les autres coefficients étant nuls.

1.  $I_p$  désignant la matrice unité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , soit  $D_p = \det(A - \lambda I_p)$ .  
Trouver une relation entre  $D_p, D_{p-1}, D_{p-2}$  et  $\lambda$  (on pose  $D_0 = 1$ , et  $D_1 = 2 - \lambda$ ). [S]
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire a priori de ses valeurs propres ? [S]
3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A$ . Montrer que  $|\lambda - 2| \leq 2$  en utilisant  $\|A - 2I_p\|$ . [S]
4. On pose  $2 - \lambda = 2 \cos \theta$ , avec  $0 \leq \theta \leq \pi$ .  
Calculer  $D_p$  en fonction de  $p$  et  $\theta$ . Examiner les cas  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . [S]
5. En déduire les valeurs propres de  $A$ . [S]



## Partie III

Dans la décomposition  $A = M - N$  évoquée en **I-4**,  $A$  est la matrice de la partie **II** et on pose  $M = 2I_p$ . Ainsi  $N = 2I_p - A$ . On note  $J = M^{-1}N = I_p - \frac{1}{2}A$ .

1. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , expliciter  $x^{(n+1)}$  en fonction de  $x^{(n)}$  et de  $b$ . [S]
2. Trouver les valeurs propres de  $J$  et calculer  $\rho(J)$ . [S]
3. La suite  $(x^{(n)})$  est-elle convergente? [S]
4. Montrer que  $1 - \rho(J) \leq \frac{\pi^2}{2p^2}$ . [S]
5. Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas? [S]

## Corrigé du problème

### Partie I

1. On se donne ici deux entiers positifs  $p$  et  $q$ .

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices quelconques de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , et  $\lambda$  un scalaire.

–  $\|A\| \geq 0$ . D'autre part  $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall i, \sum_{j=1}^q |a_{ij}| = 0 \Rightarrow \forall (i, j), a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$ .

– Pour tout  $\lambda$  :  $\|\lambda A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |\lambda a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq p} \left( |\lambda| \sum_{j=1}^q |a_{ij}| \right) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|$ .

– L'inégalité  $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$  donne :  $\sum_{j=1}^q |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^q |a_{ij}| + \sum_{j=1}^q |b_{ij}|$

On en déduit  $\sum_{j=1}^q |a_{ij} + b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|$ , puis  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

– Conclusion : l'application  $A \rightarrow \|A\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

[Q]

2. On se donne les matrices  $A = (a_{ij})$  dans  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{jk})$  dans  $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ .

La matrice  $C = AB = (c_{ik})$  est élément de  $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ .

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} b_{jk} \Rightarrow \sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^q |a_{ij}| |b_{jk}|, \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^q \left( |a_{ij}| \sum_{k=1}^r |b_{jk}| \right)$$

On en déduit  $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^q \left( |a_{ij}| \|B\| \right)$ , c'est-à-dire  $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \left( \sum_{j=1}^q |a_{ij}| \right) \|B\|$ .

Une nouvelle majoration donne  $\sum_{k=1}^r |c_{ik}| \leq \|A\| \|B\|$  et finalement  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . [Q]

3. (a) Soit  $X_i$  un vecteur propre de  $A$ , pour la valeur propre  $\lambda_i$ .

On a  $AX_i = \lambda_i X_i$ , et pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$ .

On en déduit  $\|A^k X_i\| = |\lambda_i|^k \|X_i\|$ . Or  $\|A^k X_i\| \leq \|A^k\| \|X_i\|$ .

Puisque le vecteur  $X_i$  est non nul, il en découle :  $|\lambda_i|^k \leq \|A^k\|$ . [Q]

- (b) – On suppose que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

Il existe un indice  $i$  tel que  $\rho(A) = |\lambda_i|$ . Mais l'hypothèse sur  $A$  et la question précédente impliquent  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_i|^k = 0$ , c'est-à-dire  $|\lambda_i| < 1$ , et donc  $\rho(A) < 1$ .

– Réciproquement, on suppose  $\rho(A) < 1$ .

Cela signifie que chaque valeur propre  $\lambda_i$  vérifie  $|\lambda_i| < 1$  et donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = 0$ .

On sait que la matrice  $A$  est diagonalisable : il existe donc une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Pour tout entier  $k \geq 1$ , les seuls coefficients éventuellement non nuls de  $D^k$  sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les  $\lambda_i^k$ .

Par hypothèse, et pour tout  $i$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$ . On en déduit  $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$ .

D'autre part,  $A^k = PD^kP^{-1}$  et on sait que  $\|A^k\| = \|PD^kP^{-1}\| \leq \|P\| \|D^k\| \|P^{-1}\|$ .

Ainsi  $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$  puis  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^k\| = 0$ . Donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$  et enfin  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

[Q]

4. (a)  $Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$  [Q]

(b) Les égalités  $\begin{cases} x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b \\ x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{cases}$  donnent  $x^{(n+1)} - x = M^{-1}N(x^{(n)} - x)$ .

Une récurrence évidente donne alors, pour tout  $n$  :  $x^{(n)} - x = (M^{-1}N)^n(x^{(0)} - x)$ .

[Q]

(c) Pour que la suite  $(x^{(n)})$  converge vers  $x$ , il suffit que la suite des puissances successives de la matrice diagonalisable  $M^{-1}N$  converge vers la matrice nulle.

On sait que cela est réalisé si  $\rho(M^{-1}N) < 1$ . [Q]

## Partie II

1. Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 3. On développe  $D_p$  par rapport à sa première ligne :

$$D_p = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)D_{p-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Le dernier déterminant, qui est d'ordre  $p-1$  est en fait égal à  $D_{p-2}$  (il suffit pour cela de le développer par rapport à sa première ligne.)

On trouve donc  $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$ .

D'autre part,  $D_0 = 1$ ,  $D_1 = 2-\lambda$  et  $D_2 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)D_1 - D_0$ .

L'égalité  $D_p = (2-\lambda)D_{p-1} - D_{p-2}$  est donc valable pour tout  $p \geq 2$ . [Q]

2. La matrice  $A$  est symétrique à coefficients réels : elle est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale réelle  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . [Q]

3. Notons d'abord que pour tout  $\lambda$ ,  $\|A - \lambda I_p\| \leq 2 + |\lambda|$ . En particulier :  $\|A - 2I_p\| \leq 2$ . Soit  $u$  un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \lambda u &= Au \Rightarrow (\lambda - 2)u = (A - 2I_p)u \Rightarrow |\lambda - 2| \|u\| \\ &= \|(A - 2I_p)u\| \leq \|A - 2I_p\| \|u\| \leq 2 \|u\| \end{aligned}$$

Puisque  $u \neq 0$ , on en déduit effectivement l'inégalité  $|\lambda - 2| \leq 2$ , c'est-à-dire  $0 \leq \lambda \leq 4$ . [Q]

4. Pour tout entier  $p \geq 2$ , on a l'égalité  $D_p - 2 \cos \theta D_{p-1} + D_{p-2} = 0$ .

L'équation caractéristique associée à cette récurrence est  $\mathcal{C} : t^2 - 2 \cos \theta t + 1 = 0$ .

Cette équation s'écrit  $(t - e^{i\theta})(t - e^{-i\theta}) = 0$  : ses racines sont donc  $t_1 = e^{i\theta}$  et  $t_2 = e^{-i\theta}$ .

- Si  $\theta = 0$ , c'est-à-dire si  $\lambda = 0$  :  
On a  $t_1 = t_2 = 1$ . Il existe deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout  $p$  on ait  $D_p = \alpha + p\beta$ .  
Puisque  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 2$ , on trouve  $\alpha = \beta = 1$ . Ainsi,  $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = 1 + p$ .
- Si  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire si  $\lambda = 4$  :  
On a  $t_1 = t_2 = -1$ .  
Il existe deux scalaires  $\alpha, \beta$  tels que pour tout  $p$  :  $D_p = (\alpha + p\beta)(-1)^p$ .  
Puisque  $D_0 = 1$  et  $D_1 = -2$ , on trouve  $\alpha = \beta = 1$ . Ainsi,  $\forall p \in \mathbb{N}, D_p = (1 + p)(-1)^p$ .
- Si  $0 < \theta < \pi$ , c'est-à-dire si  $0 < \lambda < 4$  :  
Il existe deux scalaires  $\alpha, \beta$  tels que pour tout  $p$  :  $D_p = \alpha \cos(p\theta) + \beta \sin(p\theta)$ .  
On a  $D_0 = \alpha = 1$  et  $D_1 = \cos \theta + \beta \sin \theta = 2 \cos \theta$ , donc  $\beta = \cotan \theta$ .  
On en déduit, pour tout entier  $p$  :  $D_p = \cos(p\theta) + (\cotan \theta) \sin(p\theta) = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin \theta}$

[Q]

5.  $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $D_p = 0$ .  
Compte tenu des résultats précédents, cela n'est possible que si  $0 < \theta < \pi$  et pour une valeur de  $\theta$  vérifiant  $\sin(p+1)\theta = 0$ .  
Cela équivaut à  $\theta = \frac{k\pi}{p+1}$  avec  $1 \leq k \leq p$ .  
On peut donc conclure :  
Les valeurs propres de  $A$  sont les  $\lambda_k = 2(1 - \cos \theta_k) = 4 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}$ ,  
(avec  $\theta_k = \frac{k\pi}{p+1}$  et  $1 \leq k \leq p$ ).  
On remarque que les  $p$  valeurs propres de  $A$  sont deux à deux distinctes. [Q]

### Partie III

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = Jx^{(n)} + M^{-1}b = (I_p - \frac{1}{2}A)x^{(n)} + \frac{1}{2}b$  [Q]
2. Pour tout vecteur  $x$ ,  $Jx = \lambda x \Leftrightarrow (2I_p - A)x = 2\lambda x \Leftrightarrow Ax = 2(1 - \lambda)x$   
 $\lambda$  est donc une valeur propre de  $J$  si et seulement si  $2(1 - \lambda)$  est une valeur propre de  $A$ , c'est-à-dire si et seulement si  $2(1 - \lambda) = 2(1 - \cos \theta_k)$ .  
Conclusion : Les valeurs propres de  $A$  sont les  $\mu_k = \cos \theta_k$ , avec  $\theta_k = \frac{k\pi}{p+1}$  et  $1 \leq k \leq p$ .  
Le minimum des  $|\mu_k|$  est atteint pour  $k = 1$  et  $k = p$ .  
On en déduit :  $\rho(J) = |\mu_1| = \cos \frac{\pi}{p+1}$ . [Q]
3. La réponse est oui, car  $\rho(J) < 1$ . [Q]
4. On utilise l'inégalité classique :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ .  
On en déduit  $1 - \rho(J) = 1 - \cos \frac{\pi}{p+1} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(p+1)} \leq \frac{\pi^2}{2(p+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{2p^2}$  [Q]
5. La vitesse de convergence de la suite  $(x^{(n)})$  est comparable à celle d'une suite géométrique de raison  $\rho(J)$ . Pour de grandes valeurs de  $p$ , on voit que  $\rho(J)$  est très proche de 1. La seule chose qu'on peut alors prévoir est que la méthode proposée n'est pas très efficace... [Q]