



Nombres de Bernoulli, formule d'Euler-MacLaurin

(D'après l'épreuve de Maths 1 du concours Centrale-Supélec 1999, Option PC)

Partie I. Nombres de Bernoulli

Les polynômes considérés dans ce problème sont à coefficients réels, et ils sont identifiés à leur fonction polynomiale associée.

1. Suite des polynômes de Bernoulli

(a) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$B_0 = 1, \text{ et pour tout entier } n \geq 1 : B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

(b) Montrer que chaque B_n est unitaire de degré n . Déterminer B_1, B_2, B_3 .

(c) Pour tout n de \mathbb{N} pour tout t de \mathbb{R} , on pose : $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a l'égalité : $C_n = B_n$.

2. Nombres de Bernoulli

(a) Vérifier que $B_0(1) = B_0(0) = 1, B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$.

Prouver que pour tout $n \geq 2, B_n(1) = B_n(0)$.

(b) Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $b_n = B_n(0)$. Montrer que pour tout entier $p \geq 1, b_{2p+1} = 0$.

Partie II. Fonction génératrice des polynômes de Bernoulli

1. Définition de la fonction génératrice ϕ

(a) On note u l'application définie sur \mathbb{R}^* par $x \mapsto u(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

Montrer que u admet un prolongement de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (considérer $1/u$).

(b) On note ϕ l'application définie sur \mathbb{R}^2 par : $\phi(x, t) = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $\phi(0, t) = 1$.

Déduire de la question précédente que ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .

(c) Pour t réel fixé, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \phi(x, t)$.

(d) Expliciter $\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t)$ en fonction de $\phi(x, t)$.

(e) Pour tout $n \geq 1$, montrer que : $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) = x \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) + n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \phi(x, t)$

2. Utilisation de la fonction génératrice ϕ

Pour tout n de \mathbb{N} et tout réel t on pose $a_n(t) = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(0, t)$ c'est-à-dire $a_n(t) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x, t) \right]_{x=0}$

- (a) Vérifier que $a_0 = 1$ puis pour tout entier $n \geq 1$ que $a'_n = na_{n-1}$ et $\int_0^1 a_n(t) dt = 0$.
 (Pour le calcul de $\int_0^1 a_n(t) dt$ on pourra déterminer $\int_0^1 \phi(x, t) dt$.)
- (b) En déduire que la fonction a_n est polynomiale et que $a_n = B_n$.
- (c) Déterminer de deux manières le développement limité à l'ordre n en 0 de l'application qui à x associe $\frac{e^x - 1}{x} \phi(x, t)$.
 En déduire l'égalité : $B_n(t) = t^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B_k(t)$.
- (d) Donner une relation permettant de calculer les nombres de Bernoulli b_n .
- (e) Écrire un algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_{2n} ($n \geq 1$).
 Donner la valeur (exacte ou approchée) de b_{10} .

Partie III. Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

1. Formule sommatoire sur le segment $[0, 1]$

Dans cette question, f est une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^{2p} où p est un entier supérieur à 1. Pour tout entier k de $\{0, \dots, p\}$ on pose $R_k = \int_0^1 \frac{f^{(2k)}(t) B_{2k}(t)}{(2k)!} dt$, où $f^{(2k)}$ désigne la dérivée $2k$ -ième de f .

- (a) Exprimer R_0 en fonction de R_1 .
- (b) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer R_k en fonction de R_{k+1} .
- (c) En déduire : $\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)] + R_p$.

2. Formule sommatoire sur un segment quelconque

Dans cette question :

- a, b sont deux réels ($a < b$), et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^{2p} avec $p \geq 1$.
- Soit n dans \mathbb{N}^* .

On considère la subdivision de $[a, b]$ définie par $a_k = a + kh$, avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $0 \leq k \leq n$.

- Pour tout réel x on note $\langle x \rangle = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x .

(a) Montrer que : $\int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}(\langle \frac{u-a}{h} \rangle) du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h}) du$

(b) Montrer que :

$$\int_a^b g(t) dt = h \left[\frac{g(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(a+kh) + \frac{g(b)}{2} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} h^{2j} [g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] + r_{p,n}$$

où $r_{p,n} = \frac{h^{2p}}{(2p)!} \int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}(\frac{u-a_k}{h}) du$.

On vient d'obtenir la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin.

3. Application

α désigne un réel de $]0, 1[$, et i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On se propose de déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n e^{ik^\alpha}$.

On note g l'application $t \mapsto e^{it^\alpha}$.

(a) Exprimer S_n en fonction de $\int_1^{n+1} g(t) dt$ et de dérivées successives de g .

(b) Montrer que quand $n \rightarrow +\infty$, $I_n = \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{1/\alpha-1} dx$ est équivalente à $-ie^{in^\alpha} n^{1-\alpha}$.

(c) En déduire un équivalent de $\int_1^n e^{it^\alpha} dt$.

(d) Montrer que pour tout j de \mathbb{N}^* , $g^{(j)}(n) = O(n^{j(\alpha-1)})$ quand n tend vers l'infini.

(e) On pose $J_n = \int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(\langle t-1 \rangle) dt$.

Déterminer p dans \mathbb{N} tel que la suite de terme général J_n soit bornée.

(on pourra poser $M_{2p} = \sup\{|B_{2p}(t)|, 0 \leq t \leq 1\}$.)

(f) En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini.